

smile/skew 現象を構造的に有している証券市場モデルとしての幾何 Lévy 過程モデルについての考察

要旨

平成 15 年度修士論文

提出日

平成 16 年 1 月 8 日

名古屋市立大学大学院経済学研究科

経済政策専攻

主指導教員 宮原孝夫 教授

副指導教員 三澤哲也 教授

茨木 智 助教授

学籍番号 023703

氏 名 森脇成彦

1 はじめに

Black and Scholes (1973) により与えられた証券市場モデルは、Black-Scholes 市場モデルと呼ばれており、最も基本的な市場モデルとして位置づけられている。そして、この Black-Scholes モデルを敲き台として様々な市場モデルが考えられてきた。

近年、現実の証券市場が持つ2つの特徴が注目されている。それは

1. 実際の株価収益率の分布は、左右非対称な分布をしている。また、正規分布よりも分布の裾が厚く、尖っている
2. *smile/skew* 現象 (*volatility smiles or skews* の存在)

というものである。これら2つの特徴は、実証分析の結果明らかとなった特徴であり、また、Black-Scholes モデルには組み込まれていない特徴である。そして、これらの特徴に焦点を当てた議論が活発になされており、これらの特徴を捉えられるように Black-Scholes モデルを拡張したモデルが多く考えられている。

幾何 Lévy 過程モデルのクラスには、現実の株価収益率の特徴を捉えることのできる市場モデルが多く属しており、この点で、市場モデルとしては、幾何 Lévy 過程モデルが望ましいと考えられている。本論文は、「(収益率の分布の特徴をうまく捉えられるという点で)市場モデルとしては、幾何 Lévy 過程モデルを用いるべきである」という広く受け入れられている結論を前提とし、「この結論を受け入れた場合、一般に、幾何 Lévy 過程モデルは非完備市場であるから、ヨーロッパ型コールオプションの価値をどのように評価すべきであろうか」という疑問を持つところから出発した。そして、この疑問に対する1つの解として [GLP & EMM] 評価モデルに注目した。すなわち、本論文では、リスク証券の価格過程として幾何 Lévy 過程を用い、「デリバティブ証券の価格は、同値マルチンゲール測度の下での、その割引現在価値に等しい」と考えた。

このとき、デリバティブ証券の価格は同値マルチンゲール測度に依存している。したがって、同値マルチンゲール測度としていかなる測度を選択すべきと考えられるか、さらなる議論が必要となる。本論文では、経済学的な観点から理論的に妥当と思われる3つの同値マルチンゲール測度に注目した。そして、これらの測度の中でどの測度を選択すべきと考えられるかを実証的な観点から検証するために、*smile/skew* 現象に注目した。すなわち、[GLP & EMM] 評価モデルは少なくとも現実の市場で観察されている *smile/skew* 現象を構造的に有

しているべきであると考えたのである。

本論文の目的は、「オプション価格は [GLP & EMM] 評価モデルにより定まる」との設定の下で、幾何 Lévy 過程モデルが volatility smile/skew という特徴を捉えられる構造をもっているかどうかについて調べることにある。すなわち、各オプション評価モデルごとに、そのモデルが smile/skew 現象を構造的に有しているかどうかをみた。

本論文では、ヨーロッパ型コールオプションの価格を得るために、Carr and Madan (1998) により提案された高速フーリエ変換法を利用した評価法を用いた。また、実際の計算は MATLAB 6.5 を用いて行った。

2 論文の構成とその内容

1 章 序論

2 章 smile/skew 現象

いま、 $C_{BS}(S_t, K, \tau, \sigma)$ でヨーロッパ型コールオプションに対する Black-Scholes の公式を表すことにする。また、 $C_t^*(K, T) \in ((S_t - Ke^{r\tau})^+, S_t)$ で実際に得られたヨーロッパ型コールオプションの市場価格を表すことにする。このとき、 C_{BS} は σ に関して単調増大であることより

$$\exists \Sigma_t(K, T), \quad C_{BS}(S_t, K, \tau, \Sigma_t(K, T)) = C_t^*(K, T)$$

が成り立つ。この $\Sigma_t(K, T)$ は t 時点の (Black-Scholes) implied volatility と呼ばれている。

ここで、仮に、オプションの市場価格の決まり方が Black-Scholes の公式によりほぼ説明できるのであれば、implied volatility は K に関してほぼ一定となるはずである。しかし、現実には smile/skew 現象が観察されている。ここで、smile/skew 現象とは、Black-Scholes モデルを前提とした下で、volatility の推定値である implied volatility が行使価格 K に依存していて一定値をとらず、さらに、volatility を何らかの基準に従って1つ定めるとき (e.g. historical volatility) の pricing error (smile/skew premium) が無視できないほどに大きいことを言う。

したがって、オプション価格評価の正確さという観点からは、Black-Scholes モデルは現実の証券市場に対する‘よい近似モデル’であるとはいえないであろう。さらにいえば、現実の市場に存在しているにもかかわらず Black-Scholes モデルには組み込まれていない事柄が存在し、このことが smile/skew 現象を引き起こしているのである。したがって、Black-Scholes モデルに代わる市場モデルには、まず smile/skew 現象を再現できる何らかの特徴を持たせる必要があると考えられる。

3章 幾何 Lévy 過程モデルと同値 martingale 測度

幾何 Lévy 過程モデルとは，安全証券の収益率は一定であるとし，リスク証券の価格過程 $\{S_t\}_{t \leq T}$ は

$$S_t := S_0 e^{Z_t}, \quad S_0 > 0$$

により与えられるとした場合をいう．このとき， $\{S_t\}_{t \leq T}$ は幾何 Lévy 過程と呼ばれる．ここで， Z_t は生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ により特徴付けられる Lévy 過程である．

本論文では，同値マルチンゲール測度として

- mean-correcting martingale measure (MCMM)
- Esscher transformed martingale measure (ESSMM)
- minimal entropy martingale measure (MEMM)

に注目した．証券価格がジャンプするリスクは各証券に固有のものであると考えられる場合には，ジャンプ拡散過程モデルに対して MCMM を用いることは経済学的な観点から妥当なものであると考えられる．また，ESSMM, MEMM を用いることの妥当性については，効用最大化問題の観点からの議論がある．

いま，確率過程 $(\{Z_t\}, \mathbf{P})$ 及び $(\{Z_t\}, \bar{\mathbf{P}})$ は，それぞれ生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ 及び $(\bar{\sigma}^2, \bar{\nu}(dx), \bar{b})$ を持つ \mathbb{R} における Lévy 過程であるものとする．このとき，生成要素が

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= \sigma^2, \\ \bar{\nu}(dx) &= \nu(dx), \\ \bar{b} &= r - \bar{\sigma}^2/2 - \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^x - 1 - x1_{\{|x| \leq 1\}}) \bar{\nu}(dx) \end{aligned}$$

なる関係を満たすならば， $\bar{\mathbf{P}}$ は MCMM となる．ただし， $\sigma^2 = 0$ の時には，事前の測度 \mathbf{P} がマルチンゲール測度の場合を除き，MCMM は存在しない．

また， $(\{Z_t\}, \mathbf{P})$ と $(\{Z_t\}, \tilde{\mathbf{P}})$ は，それぞれ生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ と $(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\nu}(dx), \tilde{b})$ により特徴付けられる \mathbb{R} における Lévy 過程であるものとする．このとき，生成要素が

$$\begin{aligned} h^* &\in \{h \in \mathcal{L} \mid \psi(-i(1+h)) - \psi(-ih) = r\}; \\ \tilde{\sigma}^2 &= \sigma^2, \\ \tilde{\nu}(dx) &= e^{h^*x} \nu(dx), \\ \tilde{b} &= r - \tilde{\sigma}^2/2 - \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^x - 1 - x1_{\{|x| \leq 1\}}) \tilde{\nu}(dx) \end{aligned}$$

なる関係を満たすならば $\tilde{\mathbf{P}}$ は ESSMM となる . ただし $\mathcal{L} := \{h \in \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{\infty} (e^{hx/2} - 1)^2 \nu(dx) < \infty\}$.
 また , $\psi(u)$ は \mathbf{P} の下での Lévy exponent .

[GLP & MEMM] モデルは Miyahara(2001) で提案されたものであり , [GLP & MEMM] モデルに対して以下の結果が示されている .

[宮原 (2003, p87; 定理 7.1 (Fujiwara-Miyahara (2002)))] 次の 2 つの条件を満たす定数 θ^* が存在するものと仮定する .

$$(C_1) \quad \int_{\{x>1\}} e^x e^{\theta^*(e^x-1)} \nu(dx) < \infty$$

$$(C_2) \quad b + \left(\frac{1}{2} + \theta^*\right) \sigma^2 + \int_{\{|x|>1\}} (e^x - 1) e^{\theta^*(e^x-1)} \nu(dx) + \int_{\{|x|\leq 1\}} \left((e^x - 1) e^{\theta^*(e^x-1)} - x \right) \nu(dx) = r$$

このとき次のことが成立する .

1. (MEMM の存在) MEMM \mathbf{P}^* が存在する .
2. (Lévy 過程) Z_t は \mathbf{P}^* の下でも Lévy 過程で , その生成要素 (A^*, ν^*, b^*) は

$$A^* = \sigma^2$$

$$\nu^*(dx) = e^{\theta^*(e^x-1)} \nu(dx)$$

$$b^* = b + \theta^* + \sigma^2 + \int_{\{|x|\leq 1\}} x d(\nu^* - \nu)$$

で与えられる .

4 章 代表的な幾何 Lévy 過程モデル

本論文においては , 幾何 Lévy 過程モデル (幾何 Lévy 過程) として , 特に

- Merton モデル (Geometric Normal Jump-Diffusion Process)

$$\sigma \in (0, \infty)$$

$$\nu(dx) = c \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2v}\right\} dx, \quad c, v > 0$$

$$b_0 \in \mathbb{R}$$

- Kou モデル (Geometric Double Exponential Jump-Diffusion Process)

$$\sigma \in (0, \infty)$$

$$\nu(dx) = c \left(p c_1 e^{-c_1|x|} 1_{\{x<0\}} + q c_2 e^{-c_2|x|} 1_{\{x\geq 0\}} \right) dx, \quad p, q \geq 0, p + q = 1, c, c_1, c_2 > 0$$

$$b_0 \in \mathbb{R}$$

- ・ 幾何 VG 過程モデル (Geometric Variance Gamma Process)

$$\sigma = 0$$

$$\nu(dx) = C \left(I_{\{x < 0\}} e^{-c_1|x|} + I_{\{x > 0\}} e^{-c_2|x|} \right) |x|^{-1} dx, \quad C, c_1, c_2 > 0$$

$$b_0 \in \mathbb{R}$$

- ・ 幾何 NIG 過程モデル (Geometric Normal Inverse Gaussian Process)

$$\sigma = 0$$

$$\nu(dx) = \frac{\delta \alpha \exp[\beta x] \mathcal{K}_1(\alpha|x|)}{\pi |x|} dx, \quad 0 < |\beta| \leq \alpha, \delta > 0$$

$$b_0 \in \mathbb{R}$$

ただし, \mathcal{K}_λ は次数 λ の第 2 種変形ベッセル関数.

に注目した.

また, 主な同値マルチンゲール測度の下で, パラメータの値を適当に与えて, 幾何 Lévy 過程モデルが volatility smile/skew という特徴を構造的に有しているかどうかをみた.

5 章 まとめ

smile/skew 現象を構造的に有しているかどうかについて検証した結果は

Merton モデル

[GNJD & MCMM] モデル: smile/skew 現象を構造的に有している.

[GNJD & ESSMM] モデル: smile/skew 現象を説明するモデルとしては適当と考えない.

[GNJD & MEMM] モデル: 今回の検証では smile/skew 現象を再現できなかった.

Kou モデル

[GDEJD & MCMM] モデル: smile/skew 現象を構造的に有している.

[GDEJD & ESSMM] モデル: smile/skew 現象を構造的に有している.

[GDEJD & MEMM] モデル: smile/skew 現象を構造的に有している.

幾何 VG 過程モデル

[GVG & ESSMM] モデル: smile 現象を構造的に有す (skew 現象は観察できなかった).

[GVG & MEMM] モデル: skew 現象を構造的に有す (smile 現象は観察できなかった).

幾何 NIG 過程モデル

[GNIG & ESSMM] モデル： smile 現象を構造的に有す (skew 現象は観察できなかった)。

[GNIG & MEMM] モデル： smile 現象を構造的に有す (skew 現象は観察できなかった)。

というものであった。

残された課題は， smile/skew 現象を構造的に持っている評価モデルのパラメータを推定し，現実により近い状況を再現するモデルを探すことにある。株式市場のデータを用いて，パラメータを推定する方法が，宮原 (2003, 第5章) に述べられている。ここで提案されている方法を用いれば，パラメータを容易に推定することができる。

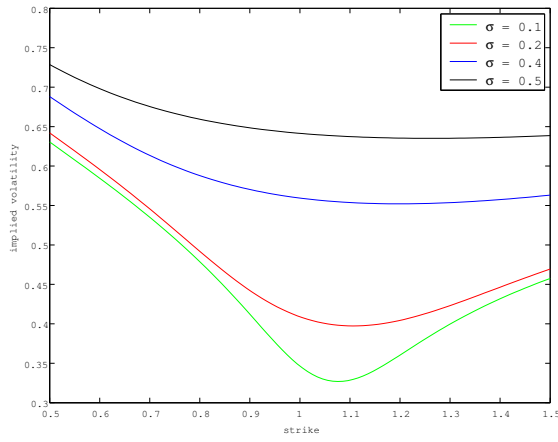
参考文献

Black, F. and Myron Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal Political Economy*, Vol. 81, pp. 637–659.

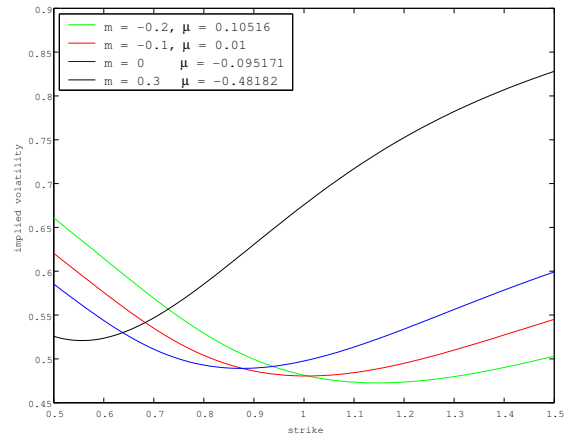
Carr, P. and Dilip B. Madan, 1998, Option valuation using the fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance*, Vol. 2, pp. 61–73.

Miyahara, Y., 2001, [Geometric Lévy processes & MEMM] pricing model and relating estimation problems, *Asian-Pacific Financial Markets*, Vol. 8, No. 1, pp. 45–60.

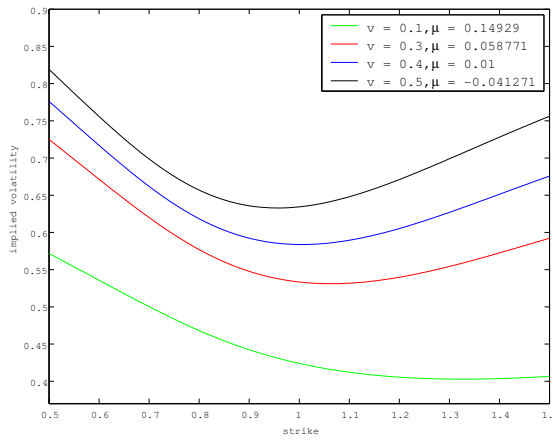
宮原孝夫、2003、株価モデルとレヴィ過程、金融工学の基礎 1、朝倉書店。



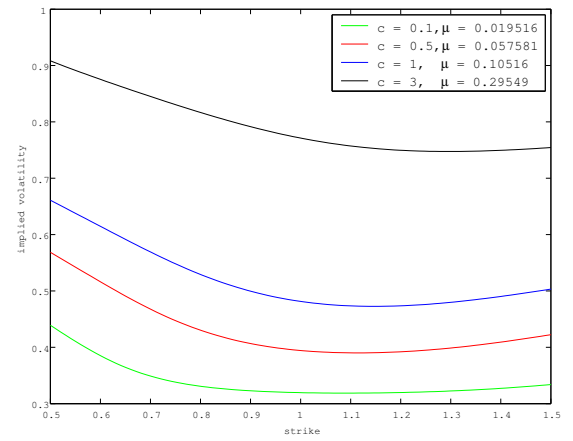
(a) $\text{NJD}(\mu = 0.2, m = -0.2, v = 0.2, c = 1), \bar{\mu} = 0.10516$



(b) $\text{NJD}(\mu = 0.2, \sigma = 0.3, v = 0.2, c = 1)$

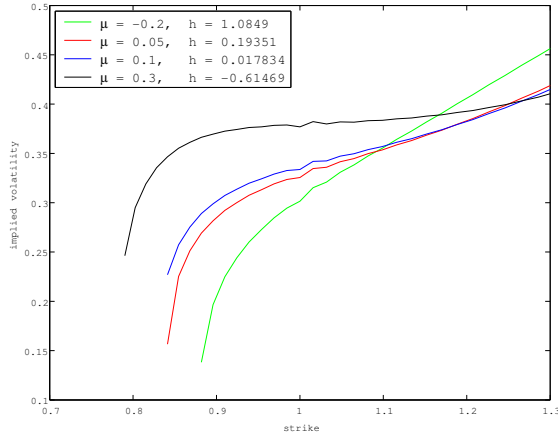


(c) $\text{NJD}(\mu = 0.2, \sigma = 0.3, m = -0.2, c = 1)$

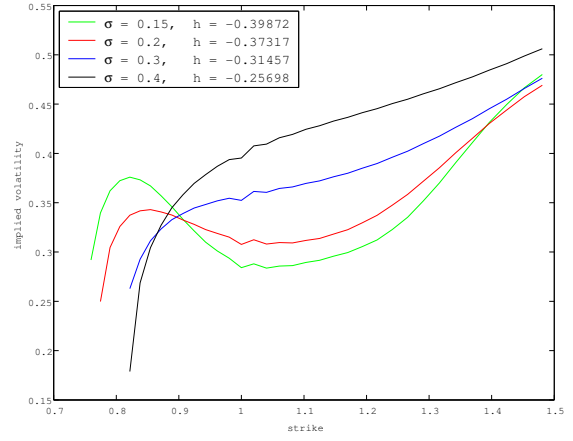


(d) $\text{NJD}(\mu = 0.2, \sigma = 0.3, m = -0.2, v = 0.2)$

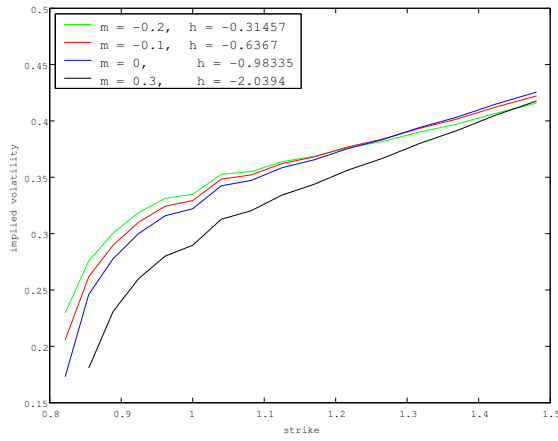
Fig. 1 mean-correcting martingale measure の下での implied volatility curve ; $r = 0.01, T = 0.5, S_0 = 1$



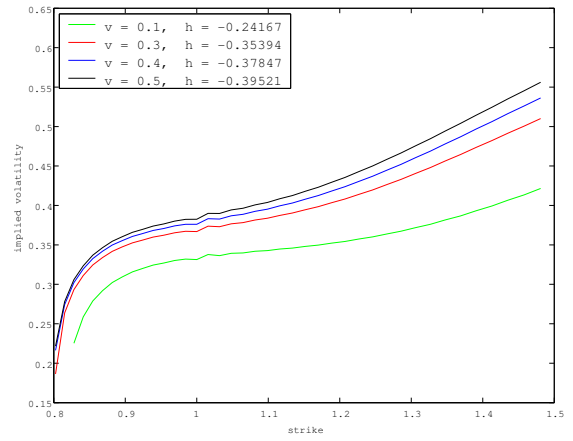
(a) $\text{NJD}(\sigma = 0.3, m = -0.2, v = 0.2, c = 1)$



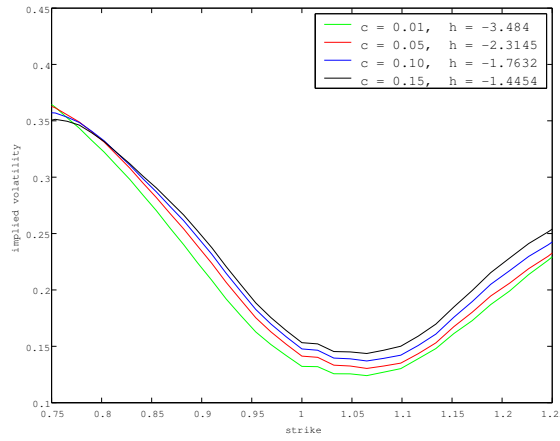
(b) $\text{NJD}(\mu = 0.2, m = -0.2, v = 0.2, c = 1)$



(c) $\text{NJD}(\mu = 0.2, \sigma = 0.3, v = 0.2, c = 1)$

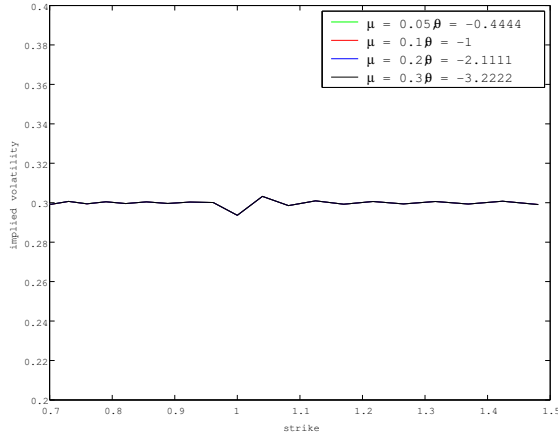


(d) $\text{NJD}(\mu = 0.2, \sigma = 0.3, m = -0.2, c = 1)$

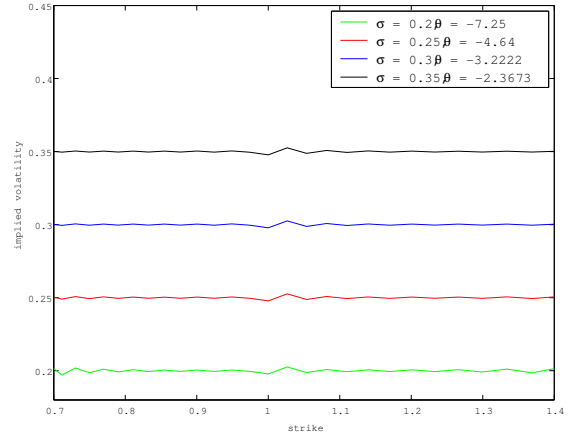


(e) $\text{NJD}(\mu = 0.2, \sigma = 0.3, m = -0.2, v = 0.2)$

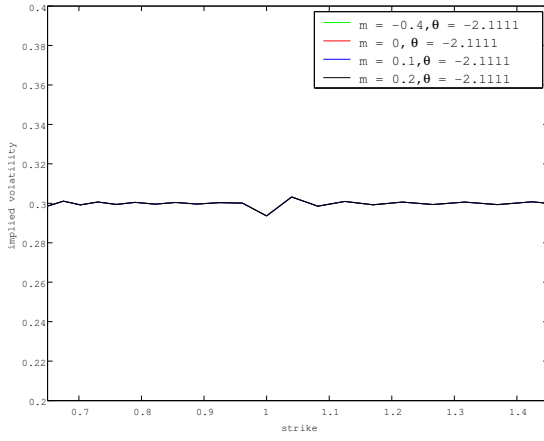
Fig. 2 Esscher transformed martingale measure \mathbb{Q}^E implied volatility curve; $r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$



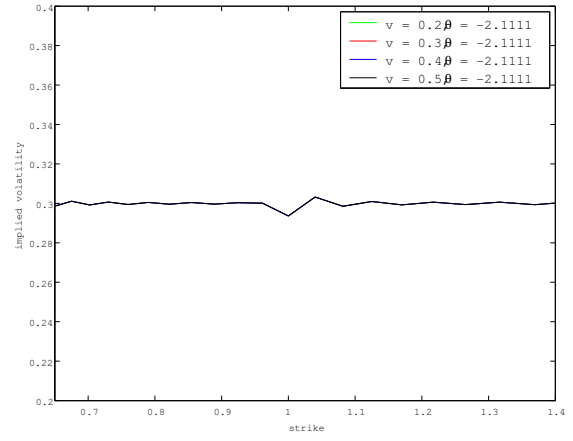
(a) $\text{NJD}(\sigma = 0.3, m = -0.2, v = 0.2, c = 1), r = 0.01, T = 0.5, S_0 = 1$



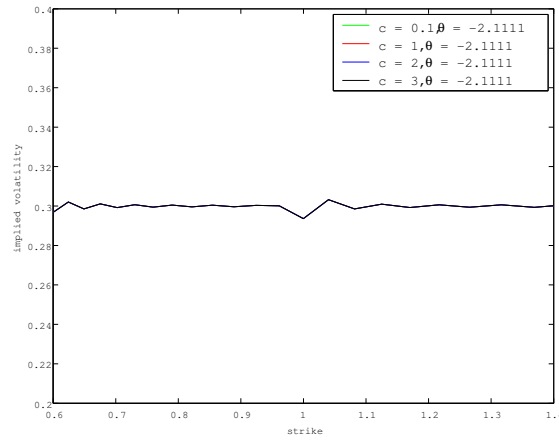
(b) $\text{NJD}(\mu = 0.3, m = -0.2, v = 0.2, c = 1), r = 0.01, T = 0.5, S_0 = 1$



(c) $\text{NJD}(\mu = 0.2, \sigma = 0.3, v = 0.2, c = 1), r = 0.01, T = 0.5, S_0 = 1$

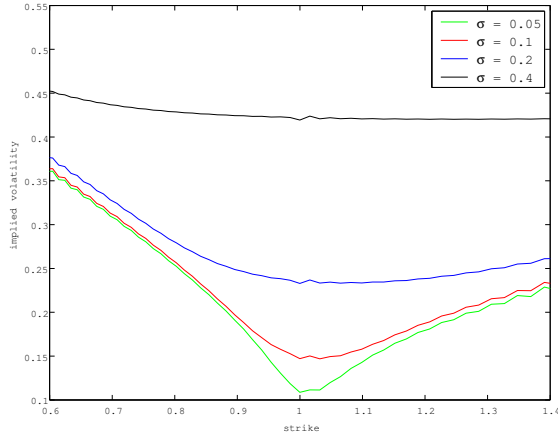


(d) $\text{NJD}(\mu = 0.2, \sigma = 0.3, m = -0.2, c = 1), r = 0.01, T = 0.5, S_0 = 1$

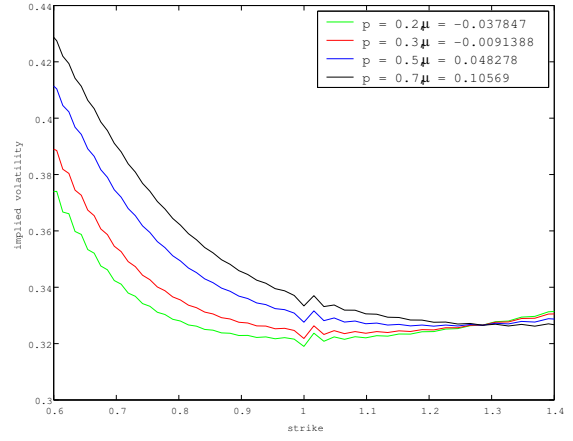


(e) $\text{NJD}(\mu = 0.2, \sigma = 0.3, m = -0.2, v = 0.2), r = 0.01, T = 0.5, S_0 = 1$

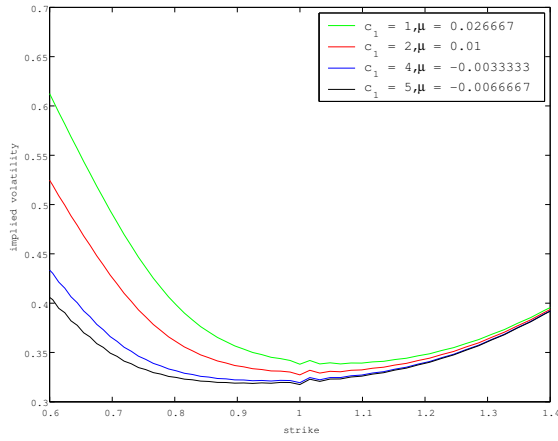
Fig. 3 [GNJD & MEMM] model の下での implied volatility curve



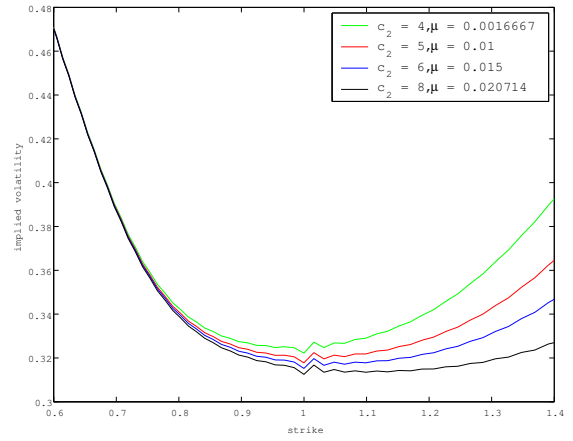
(a) DEJD($\mu = 0, p = 0.4, c_1 = 10, c_2 = 20, c = 2, \bar{\mu} = 0.019569$)



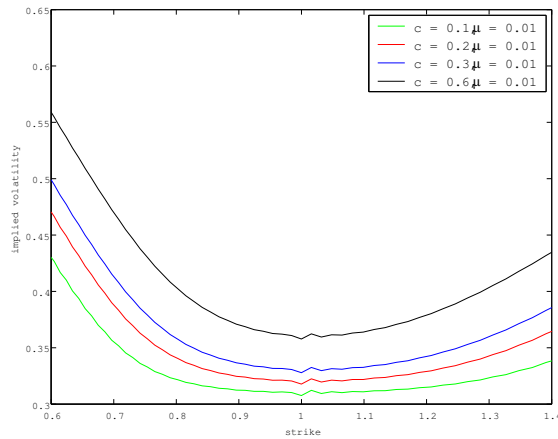
(b) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.3, c_1 = 10, c_2 = 20, c = 2$)



(c) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.3, p = 0.5, c_2 = 4, c = 0.2$)

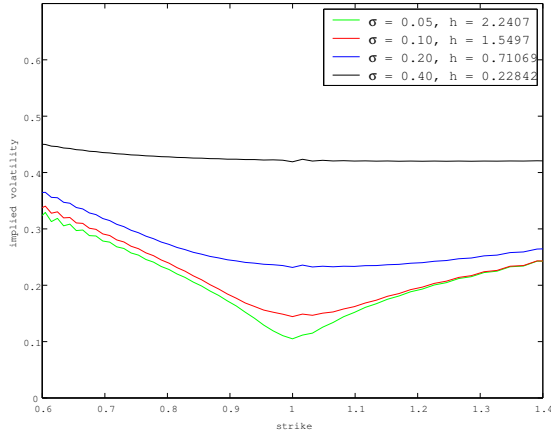


(d) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.3, p = 0.5, c_1 = 3, c = 0.2$)

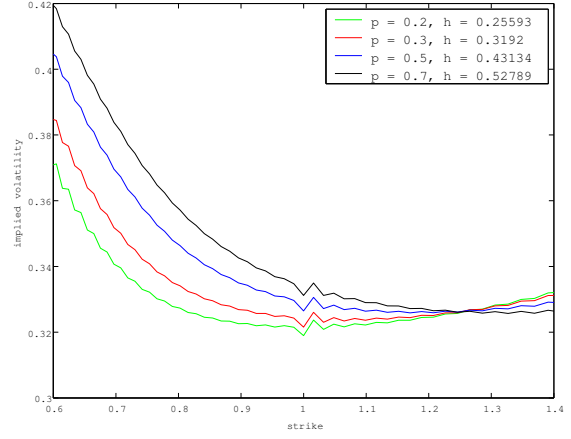


(e) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.3, p = 0.5, c_1 = 3, c_2 = 5$)

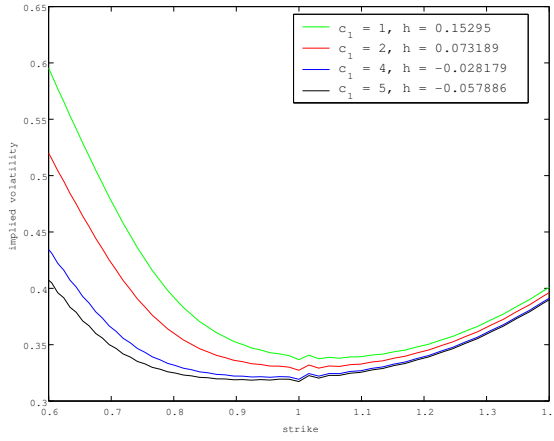
Fig. 4 [GDEJD & MCMM] pricing model \mathcal{D} 下 $\mathcal{T}\mathcal{D}$ implied volatility; $S_0 = 1, r = 0.01, T = 0.25$



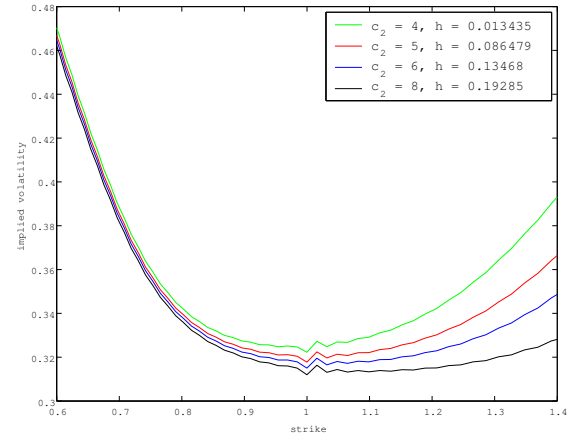
(a) DEJD($\mu = 0, p = 0.4, c_1 = 10, c_2 = 20, c = 2, \bar{\mu} = 0.019569$)



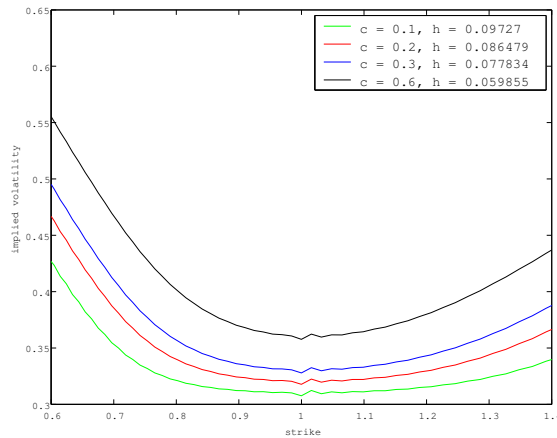
(b) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.3, c_1 = 10, c_2 = 20, c = 2$)



(c) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.3, p = 0.5, c_2 = 4, c = 0.2$)

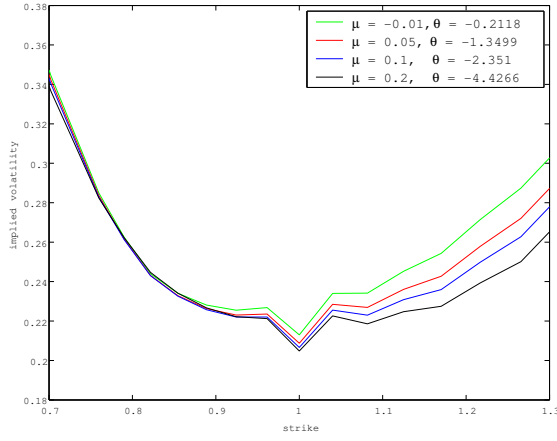


(d) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.3, p = 0.5, c_1 = 3, c = 0.2$)

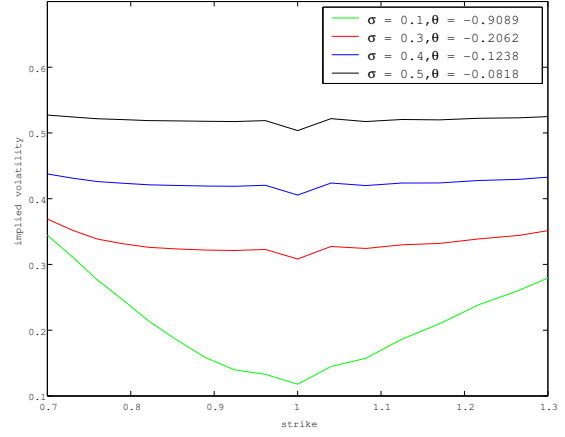


(e) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.3, p = 0.5, c_1 = 3, c_2 = 5$)

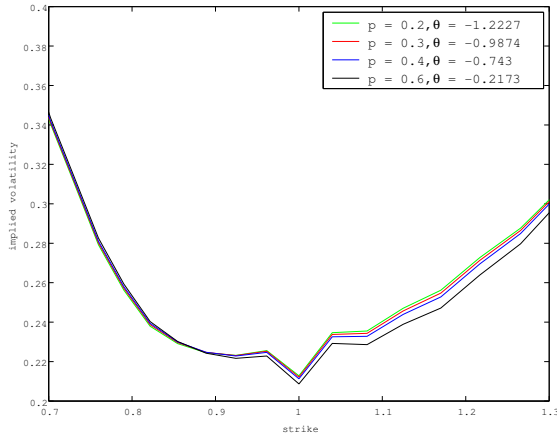
Fig. 5 [GDEJD & ESSMM] pricing model $\mathcal{D} \downarrow \mathcal{T} \mathcal{D}$ implied volatility; $S_0 = 1, r = 0.01, T = 0.25$



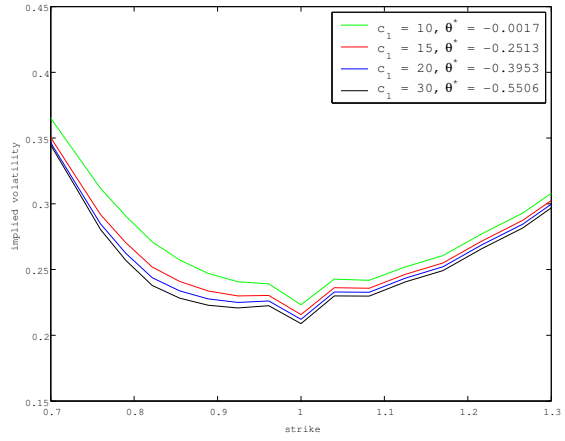
(a) DEJD($\sigma = 0.2, p = 0.5, c_1 = 20, c_2 = 10, c = 1$)



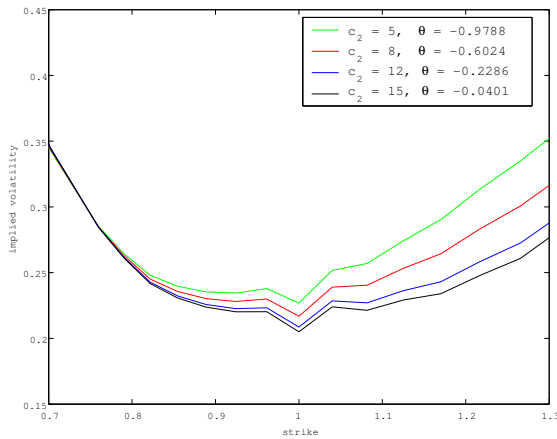
(b) DEJD($\mu = 0, p = 0.5, c_1 = 20, c_2 = 10, c = 1$)



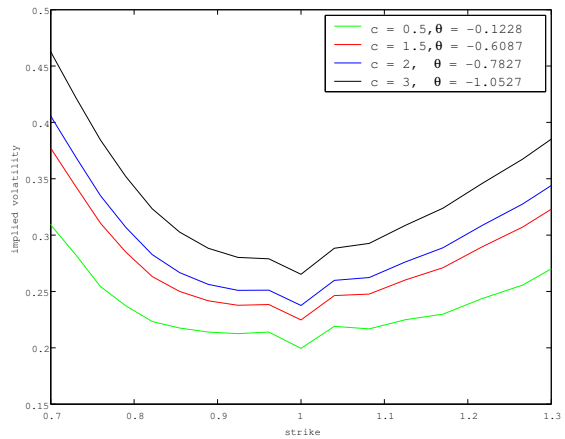
(c) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.2, c_1 = 25, c_2 = 10, c = 1$)



(d) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.2, p = 0.5, c_2 = 10, c = 1$)

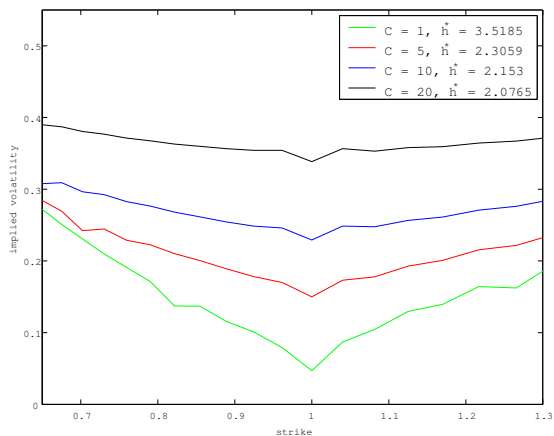


(e) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.2, p = 0.5, c_1 = 20, c = 1$)

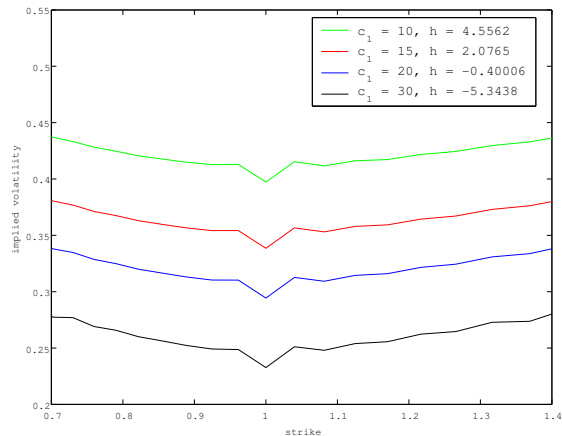


(f) DEJD($\mu = 0, \sigma = 0.2, p = 0.5, c_1 = 20, c_2 = 10$)

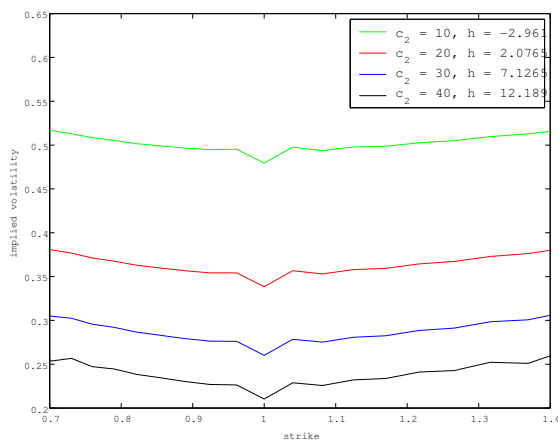
Fig. 6 [GDEJD & MEMM] pricing model の下での implied volatility curve; $S_0 = 1, r = 0.01, T = 0.25$



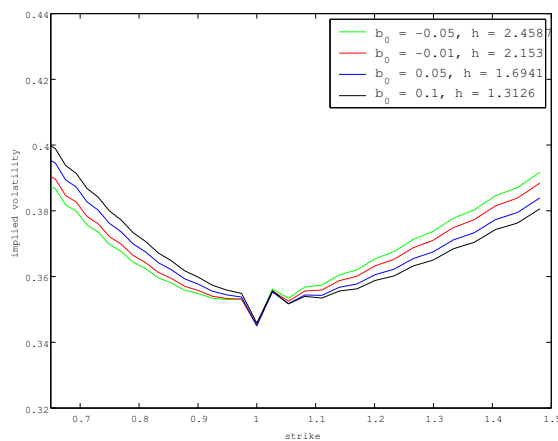
(a) $c_1 = 15, c_2 = 20, b_0 = 0, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$



(b) $C = 20, c_2 = 20, b_0 = 0, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$

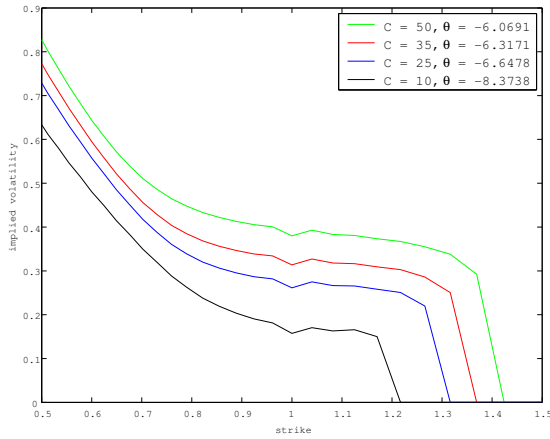


(c) $C = 20, c_1 = 15, b_0 = 0, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$

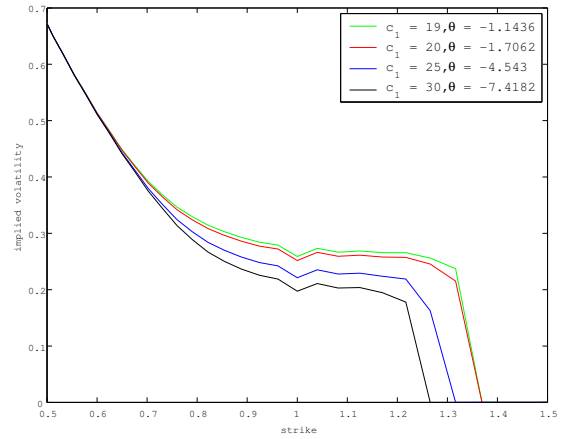


(d) $C = 20, c_1 = 15, c_2 = 20, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$

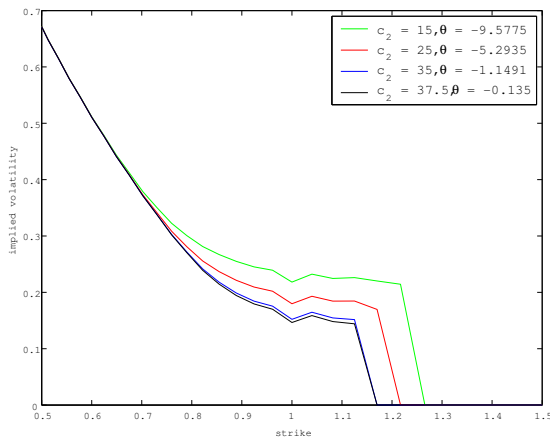
Fig. 7 [GVG & ESSMM] model における implied volatility curve



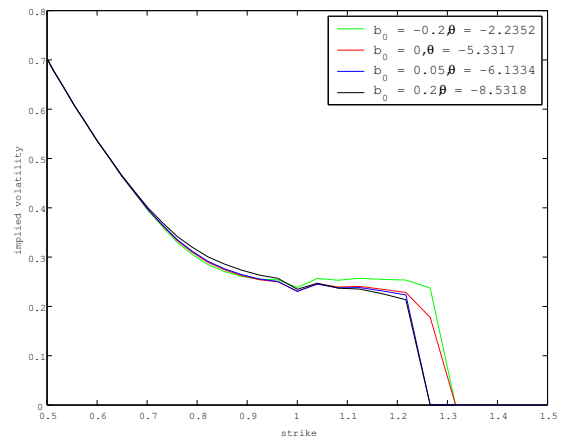
(a) $c_1 = 30, c_2 = 20, b_0 = 0.1, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$



(b) $C = 15, c_2 = 20, b_0 = 0.1, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$

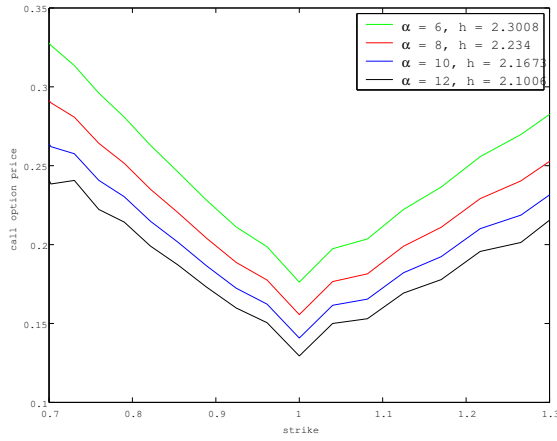


(c) $C = 15, c_1 = 30, b_0 = 0.1, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$

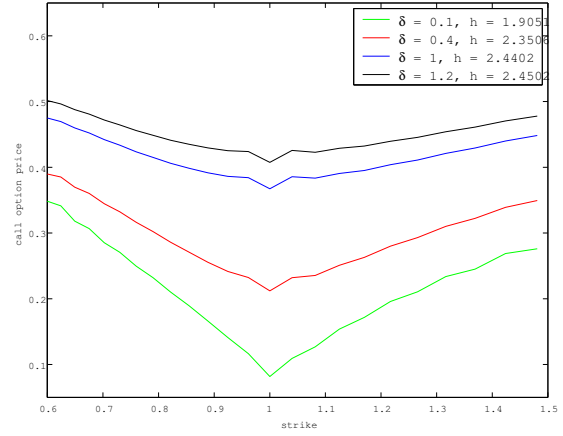


(d) $C = 20, c_1 = 30, c_2 = 20, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$

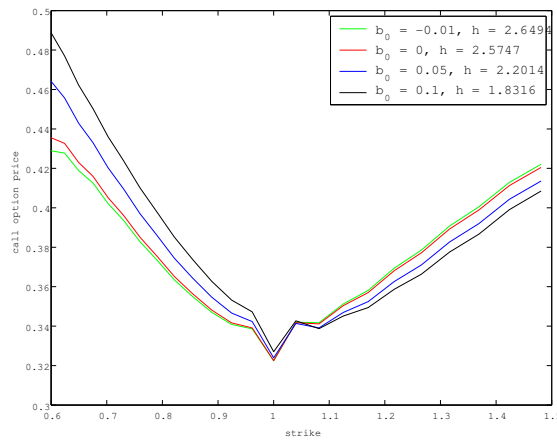
Fig. 8 [GVG & MEMM] model における implied volatility curve



(a) $\beta = -3, \delta = 0.3, b_0 = 0.02, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$

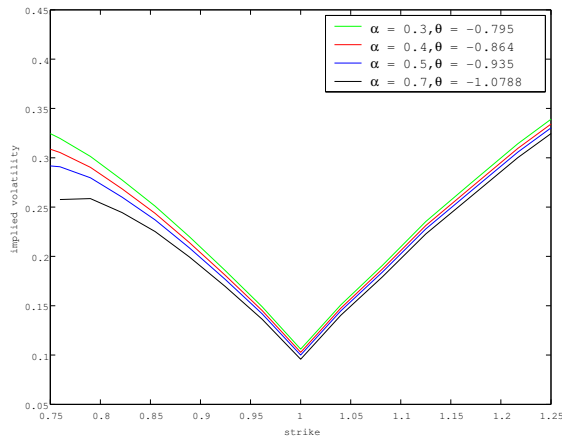


(b) $\alpha = 6, \beta = -3, b_0 = 0.02, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$

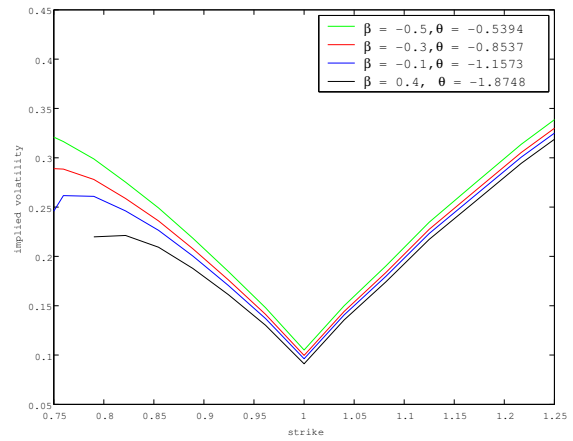


(c) $\alpha = 6, \beta = -3, \delta = 0.8, r = 0.01, T = 0.5, S_0 = 1$

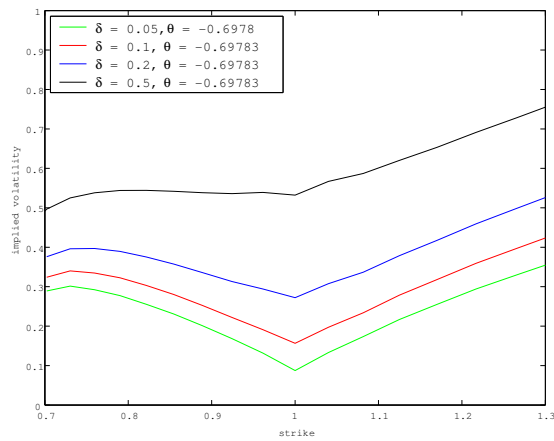
Fig. 9 [GNIG & ESSMM] model における implied volatility curve



(a) $\beta = -0.2, \delta = 0.06, b_0 = 0.01, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$



(b) $\alpha = 0.6, \delta = 0.06, b_0 = 0.01, r = 0.01, T = 0.25, S_0 = 1$



(c) $\alpha = 0.6, \beta = -0.4, b_0 = 0.01, r = 0.01, T = 0.5, S_0 = 1$

Fig. 10 [GNIG & MEMM] pricing model における implied volatility curve