

1. $4x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) $u = 2x + y$ の最小値, 最大値を求めよ。
- (2) xy を u で表せ。
- (3) $8x^3 + y^3 + 8xy$ の最小値, 最大値を求めよ。

3. 0, 1, 2, 3, 4 の 5 個の数字を重複なく並べて 5 桁の自然数を作る。ただし、最上位 (万の位) の数字が 0 であってはならない。この自然数の集合を U とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) U に含まれる奇数の個数を求めよ。
- (2) U に含まれる奇数の平均を求めよ。
- (3) U に含まれる偶数の平均と、(2) で求めた奇数の平均との大小関係を示せ。

2. 自然数 k, ℓ, m, n に対して、集合 A, B を $A = \{(k, \ell) \mid \ell = k - 7\}$,

$B = \{(m, n) \mid 2n = m + 3\}$ とする。 $\frac{\ell}{k} = \frac{n}{m}$ を満たす (k, ℓ, m, n) の組をすべて求めよ。

4. 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められ、 a_n の

一の位の数字を b_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) b_1, b_2, b_3, b_4 を求めよ。また $b_{n+4} = b_n$ が成り立つことを証明せよ。
- (3) a_n が 50 桁の数で、 a_{n+1} が 51 桁の数となるような自然数 n を求めよ。また、そのときの b_n も求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。