1. xy 平面上に動点 $\mathrm{P}(t, 2t)$, $\mathrm{Q}(t-1, 1-t)$ がある。ただし, $0 \leqq t \leqq 1$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 実数 k に対して直線 $x = k$ と直線 PQ との交点を求めよ。

(2) 閉区間 $[-1, 1]$ 内の定数 a に対し, 直線 $x = a$ と線分 PQ との交点の y 座標のとり得る範囲を a で表せ。

(3) t が 0 から 1 まで動くとき, 線分 PQ が動く領域 S の面積を求めよ。

2. 空間に四面体 ABCD と点 P, Q があり,

$$4\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 6\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{\mathrm{QA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{QB}} + 6\overrightarrow{\mathrm{QC}} + 7\overrightarrow{\mathrm{QD}} = \vec{0}$$

を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) 三角形 PAB と三角形 PBC の面積比を求めよ。

(3) 四面体 QABC と四面体 QBCD の体積比を求めよ。

3. 円周上に等間隔に n 個 ($n \geqq 4$) の点が配置されている。これらの点から異なる 3 点を無作為に選び出し, それらを頂点とする三角形をつくる。次の問いに答えよ。

(1) $n = 8$ のとき, 三角形が直角三角形になる確率を求めよ。

(2) n が偶数であるとき, 三角形が直角三角形になる確率を n の式で表せ。

(3) $n = 12$ のとき, 三角形が鈍角三角形になる確率を求めよ。

4. xy 平面において, 曲線 $y = nx^2$ (n は自然数, $x \geqq 0$) を C_n とし, 直線 $y = 1$ を L とする。2 つの曲線 C_n, C_{n+1} および L で囲まれた図形の面積を S_n とする。次の問いに答えよ。

(1) S_n を求めよ。

(2) 任意の n に対して $S_n > S_{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k > \frac{1}{2}$ となる最小の n を求めよ。