

1. 自然数 x, y, z は条件 $x \leq y \leq z$ および $xy + yz + zx = xyz$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $x \leq 3$ を示せ。
- (2) 与えられた条件を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

2. 座標空間内に原点 O および 4 点 $A(1, 4, 0), B(1, 0, \sqrt{3}), C(1, 4, \sqrt{3}), D(0, 4, \sqrt{3})$ を考える。線分 BC 上に点 P をとり、線分 CD の中点を M , 線分 AC の中点を N , 3 点 M, N, P を通る平面を α とする。次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \overrightarrow{OC} と \overrightarrow{OP} のなす角が 45° のとき、点 P の座標を求めよ。
- (2) (1) のとき、平面 α と xy 平面との交線 ℓ の方向ベクトルを求めよ。
- (3) 交線 ℓ 上に点 R をとる。直線 RM と ℓ が直交するとき、ベクトル \overrightarrow{RM} を求めよ。

3. n を 2 以上の自然数とする。1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがある。これらのカードから 2 枚を無作為に選び、カードに書かれた数字の差の絶対値を d とする。この試行について次の問いに答えよ。

- (1) $d = 1$ となる確率を n で表せ。
- (2) d の期待値 E を n で表せ。
- (3) $n = 10$ とする。選んだ 2 枚のカードをもとに戻して試行を繰り返す。 m 回目の試行で初めて $d = 1$ となる確率 P_m を求めよ。
- (4) $P_m < \frac{1}{40}$ となる最小の m を求めよ。ただし、 $0.3 < \log_{10} 2 < 0.302$ を用いてよい。

4. 実数 a, b の小さい方を $\max\{a, b\}$ と表す。関数

$$f(x) = \max\{x^2 - 2x - 3, 0\} + \max\{-2x^2 + 4x, 0\}$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = mx + 1$ の交点の数を求めよ。