1. 点 A$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ および放物線 $C : y = \frac{x^2}{2}$ を考える。点 A を通る傾き m の直線を ℓ とする。ただし, m は正である。次の問いに答えよ。

(1) C と ℓ の交点の座標を m で表せ。

(2) 第 2 象限において C, ℓ および x 軸で囲まれる図形の面積 $S(m)$ を求めよ。

(3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を $T(m)$ とする。$\frac{T(m)}{mS(m)} = 18$ となる m に対し, $\frac{n}{10} < m < \frac{n+1}{10}$ を満たす自然数 n を求めよ。

2. 数列 $\{a_n\}$ が $\frac{a_n - 3a_{n+1}}{4(n+1)} = a_n a_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定義されている。ただし, 初項 $a_1 = 1$ とする。次の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して $a_n \neq 0$ を示せ。

(2) $b_n = \frac{1}{a_n} + 2n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ とおくとき, 数列 $\{b_n\}$ のみたす漸化式を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3. 空間内の点 O, A_1, A_2, B, C を考える。このとき, ベクトル $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ はともに長さが 1 で, 角度 θ $(0 < \theta \leqq \pi/2)$ をなす。また点 B は O, A_1, A_2 を含む平面 H 上に存在せず, ベクトル $\overrightarrow{OB}$ は, $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB} = c_1$, $\overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OB} = c_2$ を満たす。ただし c_1, c_2 はいずれも 0 でない実数であるとする。さらにベクトル $\overrightarrow{OC}$ は, $\overrightarrow{OC} = c_1\overrightarrow{OA_1} + c_2\overrightarrow{OA_2}$ のように表され, かつベクトル $\overrightarrow{CB}$ と垂直である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 角度 θ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{OB}|^2 > c_1^2 + c_2^2$ が成り立つことを示せ。ただし, $|\overrightarrow{OB}|$ はベクトル $\overrightarrow{OB}$ の長さを表す。

(3) $c_1 = c_2 = c$, $|\overrightarrow{OB}| = b$ とする。また, $\overrightarrow{OD_1} = c\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OD_2} = c\overrightarrow{OA_2}$ となるように, 空間上に点 D_1, D_2 を与える。四面体 D_1D_2CB の体積を b, c を用いて表せ。

(4) (3) の条件の下で 3 点 D_1, D_2, B により定まる平面に対し, 点 C から垂線を引いたとき, 垂線と平面の交点を T とする。このとき, CT の長さを b, c で表しなさい。

4. 図 1, 2 のような網目状の道があり, 頂点 O を出発点とし, 各頂点においてそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で上に, または右斜め下に進む。ただし, 右斜め下に道がない場合は必ず上に, 上に道がない場合は必ず右斜め下に進み, A, B, C のいずれかに到達したら停止する。次の問いに答えよ。

(1) 図 1 において, 各頂点 A, B, C に到達する確率 P_A, P_B, P_C を求めよ。

(2) 図 2 において, C_1, C_2 をともに通過して C に到達する確率を求めよ。

(3) 図 2 において, B_1, B_2 をともに通過して B に到達する確率を求めよ。

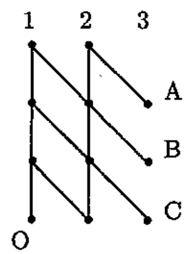

図 1

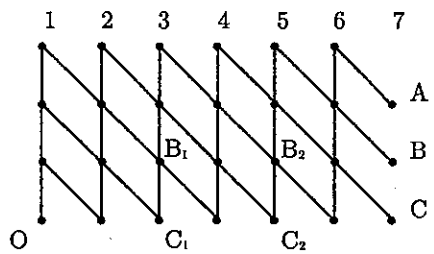

図 2