1. 10 以下の互いに異なる素数 $k,\ l,\ m,\ n$ と，10 以上の互いに異なる素数 $p,\ q$ に対して，$k+p+q=l^2$ が成立する。自然数 a, b, c は以下を満たす。

$$\begin{cases} a = kpq \\ b = k^2m^2 \\ c = kln^6 \\ a+b-c=0 \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) a が奇数であることを示せ。

(2) b が奇数であることを示せ。

(3) a, b を求めよ。

2. 正の実数 a に対して，曲線 $C : y = |x^2+ax|$ と直線 $\ell : y = -\frac{a}{2}x$ が原点 O 以外の 2 点 $\mathrm{P}\,(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}\,(x_2, y_2)$ で交わっている。ただし条件 $x_1 \leqq -1 \leqq x_2$ を満たすとする。曲線 C と直線 ℓ で囲まれた領域のうち $-1 \leqq x \leqq 0$ にある部分の面積を S とするとき次の問いに答えよ。

(1) 点 P, Q の座標を a で表し，条件を満たす a の値の範囲を求めよ。

(2) $a \leqq 1$ のとき S を a で表せ。

(3) (2) の条件のもとで S の最小値およびそのときの a の値を求めよ。

3. 正の定数 r に対して xyz 空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面上の点を $\mathrm{P}(s,t,u)$ とする。ただし $s,\ t,\ u$ は正とする。直線 OP に垂直でこの球面に接する平面が x 軸, y 軸, z 軸と交わる点をそれぞれ $\mathrm{A}(a,0,0)$, $\mathrm{B}(0,b,0)$, $\mathrm{C}(0,0,c)$ とし，球面と x 軸, y 軸, z 軸が交わる点をそれぞれ $\mathrm{D}(r,0,0)$, $\mathrm{E}(0,r,0)$, $\mathrm{F}(0,0,r)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の面積 S_1 を $r,\ s,\ t,\ u$ を用いて表せ。

(2) 3 つの正の実数 l, m, n に対し不等式 $l^3+m^3+n^3 \geqq 3lmn$ を証明せよ。また，等号が成立するのは $l=m=n$ のときに限ることを示せ。

(3) 点 P が与えられた球面を動くとき，S_1 の最小値を r で表せ。ただし，(2) の不等式を用いてよい。

(4) 三角形 DEF の面積を S_2 とする。(3) で求めた S_1 の最小値と S_2 の比を求めよ。

4. n 枚のトランプカードがあり，そのうち k 枚は絵札，残りの $n-k$ 枚は数字のカードである。これら n 枚のカードを裏向きに並べ，次の操作 1，操作 2 を順に行った後に，k 枚の絵札すべてが表を向いていれば「勝ち」とする。

操作 1：n 枚のそれぞれのカードすべてについて 1 個のサイコロを 1 回ずつ振り，偶数の目が出たらそのカードを表に向ける。

操作 2：表を向いていないカードがあれば，その中から無作為に 1 枚を選び，表に向ける。ただし，操作 1 の終了後カードがすべて表を向いていれば，なにも行わない。

次の問いに答えよ。

(1) $n=2,\ k=1$ のとき，「勝ち」となる確率を求めよ。

(2) $n=5,\ k=1$ のとき，「勝ち」となる確率を求めよ。

(3) $n=5,\ k=2$ のとき，「勝ち」となる確率を求めよ。