1. 座標平面内の曲線 S が $y=x^3-2x+1$ で表されるとする。曲線 S 上にある点 A の x 座標が a $(a>1)$ であるとき, 曲線 S の点 A における接線を ℓ とする。また, ℓ は点 A 以外で曲線 S と共有点 B をもつ。次の問いに答えよ。

(1) 共有点 B の座標を求めよ。

(2) 曲線 S と直線 ℓ で囲まれた領域の面積を求めよ。

(3) 曲線 S 上の点 C における接線が ℓ と平行であるとき, 三角形 ABC の面積を a で表せ。ただし, 点 C は点 A, B とは異なるとする。

2. 等差数列 $1, 7, 13, 19, 25, \cdots$ を $\{a_n\}$ とする。また, $1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, \cdots$ と自然数 k が k^2 個ずつ順に並ぶ数列を $\{b_n\}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ において自然数 t が初めて現れるのは第何項目であるか。t を用いて表せ。

(3) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を $c_n=a_n-b_n$ と定義する。初めて $c_n>10000$ となる項を第 m 項とするとき, m を求めよ。

(4) (3) で求めた m に対し, 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 m 項までの総和を求めよ。

3. 整数 12^{34} について次の問いに答えよ。ただし, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 何桁の数か。

(2) 一の位の数字は何か。

(3) 最高位の数字は何か。

4. 四面体の 4 つの頂点 O, A, B, C をそれぞれ中心とする 4 つの球があり, 半径を順に $1, 1, p, q$ とする。いずれの球も他の 3 つと互いに外接している。$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$, $\angle\mathrm{BOC}=\beta$, $\angle\mathrm{COA}=\gamma$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) 等式 $1-\cos\beta=2(1-\cos\alpha)(1-\cos\gamma)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $p=q$ のとき, 四面体 OABC の体積を V とする。V を p を用いて表せ。

(3) (2) の条件のもとで, V は 4 つの球の体積の和より小さいことを証明せよ。