

学位論文

[GLP & MEMM] モデルに対する実証分析

森脇成彦

名古屋市立大学大学院経済学研究科

指導教員 宮原孝夫教授

目次

1	序論	4
2	幾何レヴィ過程モデル	12
2.1	幾何レヴィ過程モデル	12
2.2	レヴィ過程	12
2.3	同値マルチンゲール測度	16
2.4	代表的な幾何レヴィ過程モデルについて	21
2.5	オプション価格の数値計算法	29
	注	31
3	日経 2 2 5 株価指数の収益率分布の非正規性がオプション評価に与える影響 について	55
3.1	序論	55
3.2	日経 2 2 5 株価指数の収益率分布に対する分析	57
3.3	日経 2 2 5 株価指数オプションに対する分析	61
4	[GLP & MEMM] モデルとボラティリティ・スマイル/スキュー	70
4.1	ボラティリティ・スマイル/スキューとは	72
4.2	[GLP & MEMM] モデルが示すインプライド・ボラティリティの特徴について	75
4.3	ボラティリティ・スマイル/スキューに対する再現性のテスト	80
	注	83
5	ボラティリティ・スキューの観点からの日経 225 株価指数オプションに対す る分析	87
5.1	序論	87
5.2	モデルについて	88
5.3	データについて	89
5.4	実証分析	90
5.5	まとめと今後の課題	98

6	OTC の通貨オプションに対する分析	99
6.1	序論	99
6.2	通貨オプションの場合のオプション価格モデル	100
6.3	データについて	101
6.4	実証分析	106
6.5	まとめと結論	111
7	結語	113
	参考文献	115
	作図一覧表	118
	表一覧表	119

1 序論

現在の経済システムが金融市場の発展なくしてここまで効率的な成長を達成することは不可能であつたらう。しかしながら、実体経済が貧困問題やエネルギー問題といった構造的な問題を抱えているのと同様に、金融市場もまた金融の不安定性という問題を構造的に持っているといえる。実体経済が人間の身体に、そして、金融市場が血液に例えられるように、現在の経済システムにおいて実体経済と金融市場は不可分のものである。それゆえ、金融市場の不安定性が時として実体経済に多大なる影響を与え、その影響に我々は常に一喜一憂させられてきたといえる。

金融の不安定性に対応する手段として発展してきたものに、確率的モデルによるリスク分析がある。この金融工学的な手法によって、リスク下における経済合理的な行動が如何なるものであるのか、あるいは、リスクを如何にして軽減できるのかについての深遠なる考察が行われるようになってきている。この分野の研究はバシェリエ（1900）の『投機の理論』に端を發し、Samuelson（1965）によって再び注目されると、その後の1960年代から今日に至るまで活発に研究が行われてきた。そして現在の経済システムが存続する限り、今後も重要な研究分野であり続けるであろう。

確率解析的手法の応用によって発展したファイナンスの分野は様々あるが、その代表的なものがオプションの価格評価理論である。現在、リスク回避のための保険的商品としてオプションは活発に取引されており、金融市場の発展に大きく貢献している。実際、例えば、OTCの通貨オプションの1日あたりの平均的な取引高は、日本では2001年には54億ドルであり、その後の2004年には74億ドルに増えている。また、グローバル・ベースでは、2001年には600億ドルであり、2004年には1170億ドルにまで増大している。このような今日のオプション市場の発展の原動力となったものは、間違いなくBlack and Scholes（1973）とMerton（1973）により導出された配当のない株を原資産とするヨーロッパ型コールオプションの価格公式（ブラック・ショールズの公式）であろう。そして、オプション市場の発展と共にオプション価格理論の研究も進み、ブラック・ショールズモデルに対する様々な観点からの拡張が行われている。

ブラック・ショールズモデルに対する拡張モデルの1つが本稿において注目した幾何レヴィ過程モデルである。幾何レヴィ過程モデルへの拡張に対する実証的な観点からの根拠と

しては、次の 2 つの特徴があげられる。

1 つ目が、原資産の収益率分布の非正規性である。ブラック・ショールズモデルでは、原資産の価格過程は幾何ブラウン運動に従うことが仮定される。それゆえ、原資産の収益率分布は正規分布に従うと仮定している。しかしながら、現実の株価の収益率や為替の変化率の分布は、正規分布よりも急尖的な分布をしていたり、もしくは、左右非対称な分布をしていることが実証的に観察されている。そして、これら実際に観察された急尖的特徴や左右非対称性を説明できる分布として、安定分布 (Fama (1963), Mandelbrot (1963) など) や scaled t-分布 (Praetz (1972), Blattberg and Gonedes (1974) など) などが古くから注目されてきた。また、近年これらの分布の特徴を説明できるものとして Madan and Seneta (1990), Madan *et al.* (1998) による VG 分布や Barndorff-Nielsen (1995) による NIG 分布などが提案されている。そしてこれらの分布はいずれも無限分解可能分布のクラスに属している。従って、収益率分布の非正規性と安定分布などに代表される無限分解可能分布によって収益率分布の特徴を上手く説明できるという実証結果は原資産過程を幾何ブラウン運動から幾何レヴィ過程に拡張する根拠となっている。

2 つ目が、オプション市場の特徴であるボラティリティ・スマイル/スキューである。この特徴は、様々な国の株価指数オプション市場においてみられる。例えば、S&P500 (Rubinstein (1994, 1996) など) や FTSE-100 (Neube (1996) など), DAX (Hafner and Wallmeiery (2000)), IBEX-35 (Pena *et al.* (1999)) などのインデックスのオプション市場で一般的に観察されている。また、通貨オプション市場においてもボラティリティ・スマイル/スキューが観察されている (第 6 章)。このように、ボラティリティ・スマイル/スキューはオプション市場において広く一般に観察されている重要な特徴であるといえる。この特徴は、ブラック・ショールズモデルによってオプション価格を評価した場合の評価誤差に一定の傾向が存在することを意味するものであり、さらにいえば、オプション市場ではブラック・ショールズモデルに組み込まれていない何らかの特徴がオプション価格を評価するうえで重要視されていることを示唆するものである。ボラティリティ・スマイル/スキューの原因の 1 つとして考えられているのが原資産価格のジャンプ・リスクである。Rubinstein (1994) によれば、CBOE で取引されている S&P500 インデックス・オプションに関してブラック・マンデー以前と以後とを比較した場合にはブラック・マンデー以降ボラティリティ・スキューの傾向が顕著に現れるようになったことが観察されている。そして、その原因としてオプション価格には将来の株価のジャンプ・リスクに対するプレミア

ムが存在することが指摘されている。また、オプション市場参加者の将来の株価に対する予測を推定するためにオプション価格を用いてリスク中立密度関数を推定することが行われているが、その結果として推定されたリスク中立密度関数は正規分布よりも急尖的な、あるいは、左右非対称な分布をしていることが観察されている (Ait-Sahalia and Lo (1998) など)。リスク中立密度関数の急尖的特徴と左右非対称性は、ボラティリティ・スマイル/スキューの形状と対応することが知られている。このことから、オプション価格には将来のジャンプ・リスクに対するプレミアムが上乘せされているといえるだろう。オプションとは将来の株価の変動リスクに対する保険的商品であることから将来の株価収益率分布が正規分布に従うと予想されない場合には、その影響は明確にオプション価格に反映される。したがって、正規分布の世界を想定するブラック・ショールズモデルから収益率分布の非正規性を説明できるモデルに拡張すべきである。

実証的な観点からは主として上で述べた 2 つの点で、原資産過程 (場合によっては直接的にリスク中立過程) を幾何ブラウン運動から幾何レヴィ過程へ拡張することの必要性が指摘されている。ただし、一般に幾何レヴィ過程に拡張した場合には、その市場モデルは非完備となることが知られている。それゆえ、幾何レヴィ過程モデルによるオプション価格評価は容易ではない。しかしながら、Miyahara (1996) で提唱された MEMM (当時は CMM と表記) に代表されるように、非完備市場におけるオプション価格理論の発展によって幾何レヴィ過程に基づいたオプション評価が理論的に可能となっている。そして、Miyahara (2001) で導入された [GLP & MEMM] モデルは幾何レヴィ過程モデルのサブクラスの 1 つである。そしてこのモデルは他の幾何レヴィ過程モデルと比較して、総じてオプション価格理論としての妥当性と一般性の面で優れたモデルといえる。MEMM 以外の経済理論的に意味のある同値マルチンゲール測度としては Gerber and Shiu (1994) の Esscher 変換による同値マルチンゲール測度 (ESMM) や Föllmer and Schweizer (1990) の最小マルチンゲール測度 (MMM) などがよく知られている。また、その他のアプローチとしては、リスク中立過程を直接幾何レヴィ過程を用いてモデル化するものもある。

本稿では [GLP & MEMM] モデルに注目した。そして、[GLP & MEMM] モデルに対してシミュレーション分析によるモデル評価と実証的な観点からのモデル評価を行い、その結果について述べた。

[GLP & MEMM] モデルは、その数学的な複雑さからモデルの特徴を解析的に評価することは難しい。特に、オプション市場において観察されているボラティリティ・スマイル/

スキューを説明できるのかどうかを解析的に知ることは難しい．そこで，シミュレーション分析によってモデルの特徴を分析した．その分析から [GLP & MEMM] モデルはボラティリティ・スマイル/スキューを説明し得るモデルであることがわかった．特に，[GLP & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティの特徴は幾何レヴィ過程に大きく依存していた．そして，[GLP & MEMM] モデルとしては [G-Stable & MEMM] モデルが重要なモデルである可能性が高いことが分かった．また，同値マルチンゲール測度間でボラティリティ・スマイル/スキューの再現性の比較を行ったが，ほとんど差はみられなかった．したがって，幾何レヴィ過程モデルのモデル選択の問題は，幾何レヴィ過程としてどのプロセスを選択するのが重要である．そして，測度選択の問題は例えば選択した幾何レヴィ過程に対してオプション価格の数値計算が行いやすいものを選べばよいであろう．また，数値計算のコストを考えないとすれば，同値マルチンゲール測度のなかでは MEMM が適用できる幾何レヴィ過程の範囲が最も広いことから，MEMM を採用しておけば重要なモデルを候補から除外してしまうリスクはなくなるであろう．実際，[G-Stable & MEMM] モデルが重要なモデルとなる可能性を指摘したが，幾何安定過程の場合には MEMM 以外の経済理論的に意味のある同値マルチンゲール測度は現在のところ存在していない．

シミュレーション分析の結果から，我々は [GLP & MEMM] モデルとして特に [G-Stable & MEMM] モデルに注目した．

幾何レヴィ過程モデルのなかでも [GLP & MEMM] モデルは理論的な観点から大変重要なモデルであるが，現在のところこのモデルに対する実証分析はほとんど行われていない．そこで，本稿では実証的な観点からモデル評価を行った．また，具体的な分析対象としては日経 225 株価指数オプションと OTC の通貨オプションを選択した．

日経 225 株価指数オプションに対する分析では，次の 2 つの観点から分析を行った．1 つ目が原証券市場において観察されている特徴である株価収益率分布の非正規性という観点からの分析である．2 つ目がオプション市場において観察されている特徴であるボラティリティ・スマイル/スキューの観点からの分析である．

まず株価収益率分布の非正規性という点からの分析では，相対的に正規性の強かった期間と相対的に正規性の弱かった期間を比較分析した．相対的に正規性の強かった期間では，[GLP & MEMM] モデルとブラック・ショールズモデルにほとんど差はなかった．その一方で，正規性の弱かった期間では [GLP & MEMM] モデルを用いることでブラック・ショールズモデルよりも予測誤差が改善していた．それゆえ，数値計算の手間を考えないとすれ

ば、ブラック・ショールズモデルから [GLP & MEMM] モデルに拡張することによってオプション価格評価のパフォーマンスが改善する可能性があることをみた。すなわち、収益率分布の非正規性がオプション価格に影響を与えている可能性があることがわかったといえる。

ボラティリティ・スマイル/スキューという点からの分析では、ボラティリティ・スマイル/スキューをもたらす原因が株価のジャンプ・リスクの影響といえるかどうか考察した。2002年2月から日本経済は緩やかな景気拡大期に転換したことに注目して、転換前の不安定な時期と転換後の安定的な時期とを比較分析した。転換前の期間には幾何レヴィ過程モデルの当てはまり度合いがブラック・ショールズモデルよりもよかった。一方、転換後の期間では幾何レヴィ過程モデルとブラック・ショールズモデルにはほとんど差はみられなかった。この結果は、オプション価格にオプション市場参加者が予想する将来の株価収益率分布の非正規性の影響が反映されている可能性があることを示すものといえる。

これらの分析から株価収益率分布の非正規性がオプション価格に反映されている可能性があることが分かった。したがって、この実証結果はブラック・ショールズモデルから株価収益率分布の非正規性を説明できるモデルである幾何レヴィ過程モデルに拡張することへの実証的な根拠となる。また、インサンプル分析では、[G-Stable & MEMM] モデル、FMLS モデル、Merton モデルがブラック・ショールズモデルと比較して統計的に有意な差がみられた。[G-Stable & MEMM] モデルがモデルの候補として残っていたことは [GLP & MEMM] モデルの重要性を示す1つの結果といえる。

ただし、日経 225 株価指数オプションの場合には、収益率分布の非正規性の影響はオプション価格に対して大きなウェイトを占めているわけではない。実際、幾何レヴィ過程モデルは株価の収益率分布の非正規性の影響が強いと考えられる区間ではそうでない区間に対してブラック・ショールズモデルよりもオプション評価誤差に改善は見られたが、まだ誤差は多く残っていた。また、オプション価格の予測性という点では、幾何レヴィ過程モデルとブラック・ショールズモデルに大きなパフォーマンスの差はみられなかった。幾何レヴィ過程モデルに対して実証的な観点からモデル評価を行うためには収益率分布の非正規性の影響がオプション価格に強く反映されている可能性のあるオプション市場において分析を行う必要がある。このことから OTC の通貨オプションに注目した。

OTC の通貨オプションに対する分析では、幾何レヴィ過程モデルはブラック・ショールズモデルと比較してあてまり度合い及び予測性の点で有意な差がみられた。特に [G-Stable

& MEMM] モデルがオプション価格に対する全体的な当てはまり及び予測性の点で最も優れたパフォーマンスを示した。

本稿では、[GLP & MEMM] モデルに対するシミュレーション分析、実証分析を行い、以上で述べた結果を得た。そして、これらの分析結果から我々は [GLP & MEMM] モデルとして特に [G-Stable & MEMM] モデルが非常に重要なモデルであることを結論として主張する。そして、この結論は MEMM の重要性を示すものでもある。実際、幾何安定過程に適用できる同値マルチンゲール測度は現在のところ MEMM が唯一といえる。MEMM は適用できる幾何レヴィ過程の範囲が広いから、重要なモデル（今の場合には幾何安定過程）が分析の候補から除外されることはないといえる。

ここで本稿の構成について簡単にまとめておく。本章は序論として研究の背景・目的及び分析内容の概略についての説明を行った。特に、本稿の目的は Miyahara (2001) で導入された [GLP & MEMM] モデルに対する実証的な評価を与えることとシミュレーション分析によるモデル評価を行うことであることを述べた。

第 2 章では本稿で分析の対象とする幾何レヴィ過程モデルの概略について簡単な説明を行う。

第 3 章では、原証券市場の特徴である株価収益率分布の非正規性が日経 225 株価指数オプションの価格に与える影響について [GLP & MEMM] モデルをもとに分析を行っている。第 3 章で行った分析は次のとおりである。まず、日経 225 株価指数の収益率分布が正規分布よりも急尖的な分布であり、また、左右非対称の分布をしていることを確認する。次に、正規分布から無限分解可能分布のクラスに拡張することで収益率分布のこれらの特徴を説明できることを確認する。その上で、日経 225 株価指数オプションの価格評価を [GLP & MEMM] モデルによって行った場合の影響について調べる。特に、正規性が相対的に強かった期間と正規性が相対的に弱った期間で分析を行い、収益率分布の非正規性がオプション価格に及ぼす影響について考察を行っている。この分析からは次のような結果が得られている。まず正規性が相対的に強かった期間においては、収益率分布は正規分布に非常に近かったこともあり、オプション評価誤差はブラック・ショールズモデルとほとんど同じであるという結果であった。一方、正規性が相対的に弱った期間においてはブラック・ショールズモデルよりも誤差に改善がみられた。それゆえ、数値計算の手間を考えないとすれば、ブラック・ショールズモデルから [GLP & MEMM] モデルに拡張することによってオプション価格評価のパフォーマンスが改善する可能性があることをみた。すなわち、収益率分布の

非正規性がオプション価格に影響を与えている可能性があることがわかったといえる。

しかしながら，[GLP & MEMM] モデルに拡張した場合の価格評価の改善度は小さいものであり，なお多くの誤差が残っていた．そして，その誤差について詳しく考察するとボラティリティ・スキューという特徴がみられた．そこで，次にボラティリティ・スキューという観点から日経 225 株価指数オプションについて分析を行うことにした．

ただし，[GLP & MEMM] モデルは，その数学的な複雑さから，ボラティリティ・スマイル/スキューを説明できるモデルであるかどうか解析的に調べることは難しい．そこで，ボラティリティ・スキューという観点からの実証分析を行う前に [GLP & MEMM] モデルがボラティリティ・スマイル/スキューを再現できるモデルであるかどうかシミュレーション分析によって考察を行う．その結果についてまとめたものが第 4 章である．シミュレーション分析の結果として，[GLP & MEMM] モデルはボラティリティ・スマイル/スキューを再現できるモデルであることがわかった．また，再現できるボラティリティ・スマイル/スキューの形状は幾何レヴィ過程に依存することが分かった．さらに，MEMM を用いた場合のボラティリティ・スマイル/スキューの再現性とその他の同値マルチンゲール測度を用いた場合のボラティリティ・スマイル/スキューの再現性に違いがあるか分析を行った．そして，今回分析を行った結果によれば，ボラティリティ・スマイル/スキューの再現性是用いる測度をかえてもあまり差が見られなかった．すなわち，幾何レヴィ過程モデルが示し得るボラティリティ・スマイル/スキューの特徴は主に採用する幾何レヴィ過程に依存することが分かった．ボラティリティ・スマイル/スキューの再現性の観点からは，[G-Stable & MEMM] モデルが比較した他のモデルに比べて優れたモデルであることが分かった．幾何安定過程に対して適用できる経済学的に根拠のある同値マルチンゲール測度は MEMM 以外では現在のところ存在していないといえる．このように MEMM は他の同値マルチンゲール測度に比べ適用できる幾何レヴィ過程の範囲が広いという優れた特徴を持っている．そして，幾何安定過程の場合のオプション価格モデルを構成できるというのは MEMM の重要な特徴であるといえる．

第 4 章の結果を踏まえ，第 5 章ではボラティリティ・スマイル/スキューという観点から幾何レヴィ過程モデルを用いて日経 225 株価指数オプションに対する実証分析を行う．ボラティリティ・スマイル/スキューという観点からの分析では，オプション市場参加者の将来の株価収益率分布の予測が重要であると考えられる．この点から第 5 章では，1999 年 1 月から 2001 年 12 月の 2 年間と 2003 年 1 月から 2004 年 12 月の 2 年間という 2 つの期間

をとってそれぞれの期間に対して分析を行っている。これは、2002年2月が日本経済の景気拡大が始まった転換点であることから転換前と転換後の影響について比較分析を行うためである。これにより、オプション市場参加者の将来予測がオプション価格にどのような影響を与えるのかについて考察することが可能となろう。

実際に分析を行ったところ、転換前の先行きの不安定な状況下ではブラック・ショールズモデルよりも幾何レヴィ過程モデルの方が当てはまりが良かった。その一方で、転換後の緩やかな景気拡大という比較的安定した状況下では、ブラック・ショールズモデルと幾何レヴィ過程モデルにはほとんど差はみられなかった。正規性が強いと考えられる期間ではブラック・ショールズモデルとほとんど差がみられない一方で、非正規性が強いと考えられる期間では幾何レヴィ過程モデルの方が当てはまりが良いという結果は、オプション価格に将来の予想収益率分布の非正規性の影響が反映されている可能性があることを示すものである。

以上の考察から、ブラック・ショールズモデルから幾何レヴィ過程モデルに拡張する実証的な根拠が得られたといえる。そこで、次に幾何レヴィ過程モデルに拡張することでオプション価格の予測性は向上するか分析を行った。その結果、幾何レヴィ過程モデルは予測性という点ではブラック・ショールズモデルとそれ程差はなかった。つまり、日経225株価指数オプションの評価誤差は収益率分布の非正規性以外の影響が大きいといえる。事実、日経225株価指数オプションに対する分析において、株価の収益率分布の非正規性の影響が強いと考えられる区間では、そうでない区間に対してブラック・ショールズモデルよりもオプション評価誤差に改善は見られたものの、改善幅はそれほど大きいものではなかった。

日経225株価指数オプションは原証券がインデックスであるため、収益率分布の非正規性は必ずしも強く意識されない可能性がある。幾何レヴィ過程モデルに対して実証的な評価を与えるためには、収益率分布の非正規性の影響が強く意識されるようなオプションに対しても同様な実証分析を行うことが重要である。そして、その対象としては通貨オプションが考えられる。それは、外国為替の変動は株価指数に比べると日々激しく変動しており、一般に外国為替の変化率の分布は急尖的な特徴を持っていることがよく知られているからである。

第6章では、OTCの通貨オプションに対してボラティリティ・スマイル/スキューという観点から実証分析を行った結果について述べる。第7章で本分析のまとめを行う。

本稿は、森脇(2004)、Miyahara and Moriwaki(2005)、Miyahara and Moriwaki(2006)、森脇(2006)、森脇・宮原(2006)に加筆・修正を加えまとめたものである。

2 幾何レヴィ過程モデル

本章では宮原 (2003) に従って幾何レヴィ過程モデルの概略について簡単に説明する。詳細については宮原 (2003) 及びその参考文献を参照の事。

本章の構成は次のようになっている。2.1 節では幾何レヴィ過程モデルの定義について述べる。そして、それ以降の節では幾何レヴィ過程モデルについてより具体的な説明を行う。まず、2.2 節ではレヴィ過程について簡単に紹介する。幾何レヴィ過程モデルは一般に非完備市場である。それゆえ、同値マルチンゲール測度は無数に存在し、一意的には定まらない。しかしながら、無数に存在する中で経済学的に意味付けのできる同値マルチンゲール測度がいくつか存在している。2.3 節では、代表的な同値マルチンゲール測度について述べる。2.4 節では、代表的な幾何レヴィ過程モデルについて簡単に説明する。2.5 節では幾何レヴィ過程モデルのオプション価格の数値計算法について簡単に説明する。

2.1 幾何レヴィ過程モデル

幾何レヴィ過程モデルでは、原資産過程 S_t は幾何レヴィ過程に従い、オプション価格 X_0 は $e^{-rT} E_{\mathbb{Q}}[X_T(S)]$ により定まるとされる。ここに、 \mathbb{Q} は同値マルチンゲール測度である。ただし、安全証券収益率 r は一定とする。

ここで、幾何レヴィ過程 S_t とは、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 及びフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ が与えられた下で、

$$S_t = S_0 e^{Z_t}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

なる形で与えられる。ここに Z_t は生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ を持つレヴィ過程である。

2.2 レヴィ過程

定義 2.1 (レヴィ過程)

(Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された確率過程 $\{Z_t, t \in [0, \infty)\}$ が次の条件：

- ・独立増分性 任意の有限個の時点 $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ に対し、 $Z_{t_1} - Z_{t_0}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ が独立である。
- ・時間的一様性 $Z_{t+s} - Z_t$ の分布は t に依らない。
- ・確率連続 $\forall t \in [0, \infty), \forall \varepsilon > 0, \lim_{s \rightarrow t} P(|Z_s - Z_t| > \varepsilon) = 0$

- càdlàg な見本過程 $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ となる $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ が存在して, $\forall \omega \in \Omega_0$ に対し $Z_t(t, \omega)$ は t の関数として右連続かつ左極限を持つ.
- $Z_0 = 0$ (\mathbf{P} -a.s.) である.

を満たすとき, $\{Z_t, t \in [0, \infty)\}$ はレヴィ過程と呼ばれる.

以下, 表記を簡単にするために, 確率過程 $\{Z_t, t \in [0, \infty)\}$ を $\{Z_t\}$ と書くこととする. また, 時間域が有界の場合, すなわち, $\{Z_t, t \in [0, T]\}$ の場合は $\{Z_t\}_{t \leq T}$ と書くことにする.

レヴィ過程 $\{Z_t\}$ は, 次の意味で, 無限分解可能分布と一対一の対応がある:

定理 2.2 (佐藤 (1990, p34, p58; 定理 2.1.8, 定理 2.4.6))

1. $\{Z_t\}$ を \mathbb{R} 値のレヴィ過程とし, $\mu(dz)$ を Z_1 の分布とすると, $\mu(dz)$ は無限分解可能分布である.
2. 逆に, $\mu(dz)$ を \mathbb{R} 上の任意の無限分解可能分布とすると, $\mu(dz)$ が Z_1 の分布となるようなレヴィ過程が, 分布の意味で一意的に存在する.
3. さらに, Z_t の分布 $\mu_t(dz)$ の特性関数 $\phi_t(u)$ に対して

$$\phi_t(u) = \{\phi_1(u)\}^t$$

が成立する. したがって, レヴィ過程 $\{Z_t\}$ の分布は Z_1 の分布が定まればすべて定まる.

ここで, 1次元分布 $\mu(dz)$ が無限分解可能分布であるとは, その特性関数 $\phi(u)$ が, 任意の n に対してある分布の特性関数 $\phi_n(u)$ により

$$\phi(u) = (\phi_n(u))^n$$

と表現できることである. また, 無限分解可能分布の特性関数 $\phi(u)$ は, Lévy-Khinchine の標準形と呼ばれる次の表現を持つ (佐藤 (1990, pp37-39; 定理 2.2.1. 無限分解可能分布に対する Lévy の標準形).

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \exp(\psi(u)) \\ \psi(u) &= -\frac{\sigma^2}{2}u^2 + ibu + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x| \leq 1\}} \right) \nu(dx) \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで, パラメータの3つの組 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ は分布 μ の生成要素と呼ばれ, 次の条件を満たしている:

- σ^2 と b は定数で, $\sigma^2(\geq 0)$, $b \in \mathbb{R}$ である .
- $\nu(dx)$ は

$$\nu(\{0\}) = 0, \quad \int_{|x|>0} \min(x^2, 1) \nu(dx) < \infty$$

を満たす \mathbb{R} 上の測度である .

$(\sigma^2, \nu(dx), b)$ が μ の生成要素と呼ばれるのは, μ に対して $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ が一意的に定まり, また逆に, 上記2つの条件を満たす $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ が与えられれば, そのときには (2.1) の右辺は \mathbb{R} 上のある無限分解可能分布の特性関数となることによる .

$\{Z_t\}$ と μ の対応関係から, $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ はレヴィ過程 $\{Z_t\}$ の生成要素とも呼ばれる . また, ψ は Lévy exponent と呼ばれ, ν はレヴィ測度と呼ばれる .

$\phi(u)$ は

$$\int_{|x|\geq 1} |x| \nu(dx) < \infty$$

が満たされるときには

$$\phi(u) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u^2 + ib_1u + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux) \nu(dx)\right), \quad b_1 = b + \int_{|x|\geq 1} x \nu(dx)$$

とかけ, この表現もよく使われている . この表現に対応する生成要素は $(\sigma^2, \nu(dx), b_1)_1$ とかけられる . ここで, b_1 は Z_1 の分布の平均となることが知られている .

また,

$$\int_{|x|<1} |x| \nu(dx) < \infty$$

が成り立つときは

$$\phi(u) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u^2 + ib_0u + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1) \nu(dx)\right), \quad b_0 = b - \int_{|x|<1} x \nu(dx)$$

と表現でき, この表現に対応する生成要素は $(\sigma^2, \nu(dx), b_0)_0$ とかけられる . そして, b_0 は分布のずれ (drift) と呼ばれている .

レヴィ過程は, その分布の特性関数が Lévy-Khinchine の標準形 :

$$\phi(u) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u^2 + ibu\right) \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x|\leq 1\}}) \nu(dx)\right)$$

という標準表現形を持っていたが, このことを標本関数にまで精緻化することができる :

定理 2.3 (佐藤 (1990 , pp152-153 ; 定理 6.1.2. Lévy-Itô 分解))

$\{Z_t\}, \{W_t\}, N_p(dt dx)$ はそれぞれレヴィ過程, Wiener 過程, Poisson 配置を表すものとする. このとき次の表現が成り立つ:

$$Z_t = \sigma W_t + bt + \int_{0+}^t \int_{|x| \leq 1} x \tilde{N}_p(dudx) + \int_{0+}^t \int_{|x| > 1} x N_p(dudx) \quad (2.2)$$

ここで $\tilde{N}_p(dudx) = N_p(dudx) - \hat{N}_p(dudx)$ であり, $\hat{N}_p(dudx)$ は $N_p(dudx)$ の compensator で $\hat{N}_p(dudx) = du\nu(dx)$ である.

この表現からもわかるように, レヴィ過程とは, 直感的に言えば, 連続的な確率変動にジャンプ的な確率変動が加わったものであるといえよう.

定理 2.4 (佐藤 (1990 , p153 ; 定理 6.1.3 特別な場合の Lévy-Itô 分解))

レヴィ過程 $\{Z_t\}$ が

$$\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$$

を満たすときには

$$\int_{0+}^t \int_{|x| \leq 1} x \tilde{N}_p(dudx) = \int_{0+}^t \int_{|x| \leq 1} x N_p(dudx) - t \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)$$

とかけ, Z_t は次のように表現できる:

$$Z_t = \sigma W_t + b_0 t + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} x N_p(dudx)$$

次の定理は後に必要となるのでここで紹介しておく.

定理 2.5 (Protter(1990 , p71 ; Theorem 32 Itô's formula))

\mathbb{R} 値の確率過程 $\{X_t\}$ は semimartingale であるものとする. また, 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は C^2 -級の関数とする. このとき $\{f(X_t)\}$ は再び semimartingale となり, さらに, 次の公式が成り立つ:

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \int_{0+}^t f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X_{s-}) d[X, X]_s^c \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} \{f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s\} \end{aligned}$$

ここで, $[X, X]^c$ は 2 次変分の連続部分.

レヴィ過程は semimartingale であることが知られているので, 定理 2.5 より次の結果が従う:

定理 2.6 (Itô's formula for Lévy process)

\mathbb{R} 値のレヴィ過程 $\{Z_t\}$ 及び C^2 -級の関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられているものとする．このとき，伊藤の公式は次のようにかける：

$$\begin{aligned} f(Z_t) - f(Z_0) &= \int_{0+}^t \sigma f'(Z_{s-}) dW_s + \int_{0+}^t b f'(Z_{s-}) ds + \frac{1}{2} \int_{0+}^t \sigma^2 f''(Z_{s-}) ds \\ &\quad + \int_{0+}^t \int_{|x| \leq 1} x f'(Z_{s-}) \tilde{N}_p(dudx) \\ &\quad + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \left\{ f(Z_{s-} + x) - f(Z_{s-}) - f'(Z_{s-})x 1_{\{|x| \leq 1\}} \right\} N_p(dudx) \end{aligned}$$

ただし，任意の可測関数 $g(t, x)$ に対して

$$\int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} g(s, x) N_p(dudx) := \sum_{0 < s \leq t} g(s, \Delta X_s).$$

2.3 同値マルチンゲール測度

一般に，幾何レヴィ過程モデルは非完備市場である．それゆえ，幾何レヴィ過程モデルの同値マルチンゲール測度はブラック・ショールズモデルの場合と違い必ずしも明らかではない．しかしながら，経済理論的に妥当性のある同値マルチンゲール測度の候補がいくつか考えられている．それゆえ，幾何レヴィ過程モデルとしてどのモデルを用いるべきかというモデル選択の問題は，幾何レヴィ過程としてどのプロセスを採用するのかという点と同値マルチンゲール測度としてどの測度を選択するのかという2つの観点から考察しなければならない．

ここで，一般に，幾何レヴィ過程モデルに対する同値マルチンゲール測度に関しては次の定理が重要である：

定理 2.7 (Sato (1999, pp218-219; Theorem 33.1, 33.2))

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上の $\{Z_t\}$ と $(\Omega, \mathcal{F}, \check{\mathbf{P}})$ 上の $\{Z_t\}$ はそれぞれ生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ と $(\check{\sigma}^2, \check{\nu}(dx), \check{b})$ によって特徴付けられるレヴィ過程であるとする．このとき，次の3つの条件：

1. $\sigma^2 = \check{\sigma}^2$
2. レヴィ測度 $\nu, \check{\nu}$ は相互に絶対連続な測度で， $\varphi(x) := \log\left(\frac{d\check{\nu}}{d\nu}\right)$ が条件：

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{\varphi(x)/2} - 1)^2 \nu(dx) < \infty$$

を満たしている .

$$3. \check{b} - b - \int_{|x| \leq 1} x (\check{\nu} - \nu)(dx) \in \mathfrak{R}(\sigma^2), \quad \mathfrak{R}(\sigma^2) := \{\sigma^2 x : x \in \mathbb{R}\}$$

が満たされているならば , そして , そのときに限り , 任意の $t (\in (0, \infty))$ に対して , $\mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t}$ と $\check{\mathbf{P}}|_{\mathcal{F}_t}$ とは相互に絶対連続となる .

(ii) さらに , 条件 3 を具体的に次のように与えよう :

$$3'. \check{b} - b - \int_{|x| \leq 1} x (\check{\nu} - \nu)(dx) = \sigma^2 \eta, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

このときには

$$\begin{aligned} U_t &= \eta \sigma W_t - \frac{1}{2} \eta^2 \sigma^2 t + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) N_p(dudx) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\varphi(x)} - 1) d\nu(dx) \\ &= \eta \sigma W_t - \frac{1}{2} \eta^2 \sigma^2 t + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \tilde{N}_p(dudx) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\varphi(x)} - 1 - \varphi(x)) d\nu(dx) \end{aligned}$$

がほとんど確実に定義でき , U_t は以下に与える生成要素 $(\sigma_U^2, \nu_U(dx), b_U)$ により特徴付けられる $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上の \mathbb{R} におけるレヴィ過程となる .

$$\sigma_U^2 = \eta^2 \sigma^2$$

$$\nu_U = \nu \varphi^{-1} \Big|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

$$b_U = -\frac{1}{2} \eta^2 \sigma^2 - \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y 1_{\{0 < |y| \leq 1\}}(y)) (\nu \varphi^{-1})(dy).$$

このとき , 任意の $t (\in (0, \infty))$ に対して

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}} [e^{U_t}] = \mathbf{E}^{\check{\mathbf{P}}} [e^{-U_t}] = 1$$

が成り立ち

$$\left. \frac{d\check{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{U_t} \quad \mathbf{P}\text{-a.s.} \quad (2.3)$$

となる .

いま $Y_t := e^{U_t}$ とすると , (2.3) は次のようにも書ける¹⁾ :

$$\left. \frac{d\check{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = 1 + \int_{0+}^t \eta \sigma Y_{s-} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} Y_{s-} (e^{\varphi(x)} - 1) \tilde{N}_P(dsdx) \quad \mathbf{P}\text{-a.s.} \quad (2.4)$$

また , density transformation した場合には $\check{\mathbf{P}}$ の下での確率過程 $\{Z_t\}_{t \leq T}$ は再びレヴィ過程となっている点に注目すれば , $\{e^{-rt} S_t\}_{t \leq T}$ が $\check{\mathbf{P}}$ -martingale となるための条件は

$$\check{\psi}(-i) = \frac{\check{\sigma}^2}{2} + \check{b} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1 - x 1_{\{|x| \leq 1\}}) \check{\nu}(dx) = r \quad (2.5)$$

となる²⁾。

以上から，同値マルチンゲール測度を定めるためには，定理 2.7 に従って同値な測度を特定し，(2.5) を満たすように (定理 2.7 の条件 1, 2, 3' に影響しない範囲内で) 変動可能なパラメータ η を用いて調整してやればよいことが分かる。

本稿では，同値マルチンゲール測度として

- minimal martingale measure (MMM)
- mean-correcting martingale measure (MCMM)
- Esscher transformed martingale measure (ESMM)
- minimal entropy martingale measure (MEMM)

に注目する。

本稿では，幾何レヴィ過程モデルの表記を簡単にするために『[GLP & MEMM] モデル，[GLP & ESMM] モデル』のような表現を使っている。これは同値マルチンゲール測度としてそれぞれ MEMM, ESMM を採用した場合の幾何レヴィ過程モデルのことを意味する。

それぞれの測度に対して以下のことがわかっている。

次の [GLP & MMM] モデルに関する結果は Chan (1999) によるものである。ただし，ここでは測度変換後の原資産過程も幾何レヴィ過程となる場合に限定した結果を述べる。

ここに，同値 martingale 測度 $\hat{\mathbf{P}}$ が minimal martingale measure であるとは， $\{e^{-rt}S_t\}_{t \leq T}$ の martingale 部分 M に対して， $\langle M, L \rangle = 0$ となる任意の 2 乗可積分 \mathbf{P} -martingale L が， $\hat{\mathbf{P}}$ -martingale となっている場合をいう (Föllmer and Schweizer (1990, p398; definition 3.2))。

いま，同値 martingale 測度 $\hat{\mathbf{P}}$ は

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = 1 + \int_0^t \gamma_s \sigma Y_{s-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_s Y_{s-} x \tilde{N}_P(dsdx)$$

により定まるとする。このとき $\hat{\mathbf{P}}$ は minimal martingale measure となっている (Chan (1999, p517))。ただし， $\{\gamma_t\}_{t \leq T}$ は $\{e^{-rt}S_t\}_{t \leq T}$ が martingale となるように選ばれている。また， Z_t は必要なだけの次数の有界なモーメントをもっているものと仮定する。一般に，(2.4) が成り立っていたことから，上式と比較することによって次の結果を得る³⁾：

MMM いま，確率過程 $(\{Z_t\}, \mathbf{P})$ 及び $(\{Z_t\}, \hat{\mathbf{P}})$ は，それぞれ生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ ， $(\hat{\sigma}^2, \hat{\nu}(dx), \hat{b})$ を持つ \mathbb{R} におけるレヴィ過程であるものとする．このとき，生成要素が

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \sigma^2, \\ \hat{\nu}(dx) &= (\eta x + 1)\nu(dx), \\ \hat{b} &= b + \eta \left(\sigma^2 + \int_{\{|x| \leq 1\}} x^2 \nu(dx) \right) \\ \eta &= \frac{r - \psi(-i)}{\sigma^2 + \int_{-\infty}^{\infty} x(e^x - 1)\nu(dx)}\end{aligned}$$

なる関係を満たすならば， $\hat{\mathbf{P}}$ は *minimal martingale measure* となる．

一般に，MCMM といえば，事前の測度 \mathbf{P} がマルチンゲール測度となるように平均を調整して得られた測度のことを指す．ただし，本稿では，MCMM といえば，以下のように，事前の測度 \mathbf{P} に対して同値となる場合に限定する．

MCMM いま，確率過程 $(\{Z_t\}, \mathbf{P})$ 及び $(\{Z_t\}, \bar{\mathbf{P}})$ は，それぞれ生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ と $(\bar{\sigma}^2, \bar{\nu}(dx), \bar{b})$ を持つ \mathbb{R} におけるレヴィ過程であるものとする．このとき， $\bar{\mathbf{P}}$ が *mean-correcting measure* であるとは，生成要素が

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2 &= \sigma^2, \\ \bar{\nu}(dx) &= \nu(dx), \\ \bar{b} &= \sigma^2 \eta + b, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

なる関係を満たす場合をいう．さらに， η として特に

$$\eta = \frac{r - b - \sigma^2/2 - \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^x - 1 - x1_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(dx)}{\sigma^2}, \quad \sigma^2 \neq 0$$

とした場合には， $\bar{\mathbf{P}}$ はマルチンゲール測度となり，このとき， $\bar{\mathbf{P}}$ は *mean-correcting martingale measure (MCMM)* と呼ばれる．ここに， $\bar{\mathbf{P}}$ がマルチンゲール測度であるとは， $\{e^{-rt} S_t\}_{t \leq T}$ が $\bar{\mathbf{P}}$ -マルチンゲールである場合をいう．

$(\sigma^2, \nu(dx), b_0)$ ， $\sigma^2 \neq 0$ の場合の [GLP & MCMM] モデルは Merton (1976) の公式としてよく知られた結果と一致する⁴⁾．

ESMM に関しては Schoutens (2003) を及びその参考文献を参照のこと．

ESMM いま, $(\{Z_t\}, \mathbf{P})$ と $(\{Z_t\}, \tilde{\mathbf{P}})$ は,それぞれ生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ と $(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\nu}(dx), \tilde{b})$ を持つ \mathbb{R} におけるレヴィ過程であるものとする. このとき, 生成要素が

$$h^* \in \{h \in \mathcal{L} \mid \psi(-i(1+h)) - \psi(-ih) = r\}; \quad (2.6)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2,$$

$$\tilde{\nu}(dx) = e^{h^*x} \nu(dx),$$

$$\tilde{b} = b + \sigma^2 h^*$$

なる関係を満たすならば, $\tilde{\mathbf{P}}$ は ESMM となる. ただし

$$\mathcal{L} := \left\{ h \in \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{\infty} (e^{hx/2} - 1)^2 \nu(dx) < \infty \right\}.$$

この場合の測度がエッシャー変換になっていることは容易に確かめることができる⁵⁾. また, h^* がマルチンゲール条件であることも容易にわかる⁶⁾.

また, $\tilde{\mathbf{P}}$ の下での特性関数は事前の測度 \mathbf{P} の下での特性関数によって特徴付けることができる:

$$\tilde{\phi}(u) = \frac{\phi(u - ih^*)}{\phi(-ih^*)} \quad (2.7)$$

Gerber and Shiu (1994, pp175-177) において, Esscher transformed martingale measure を用いることの経済学的な意味について述べられている⁷⁾.

[GLP & MEMM] モデルは Miyahara (2001) で提案されたものであり, [GLP & MEMM] モデルに対して以下の結果が示されている.

MEMM (Fujiwara and Miyahara (2003)) 条件 (C) : 次の2つの条件を満たす定数 θ^* が存在する.

$$(C_1) \quad \int_{\{x>1\}} e^x e^{\theta^*(e^x-1)} \nu(dx) < \infty$$

$$(C_2) \quad b + \left(\frac{1}{2} + \theta^*\right) \sigma^2 + \int_{\{|x|>1\}} (e^x - 1) e^{\theta^*(e^x-1)} \nu(dx) \\ + \int_{\{|x|\leq 1\}} ((e^x - 1) e^{\theta^*(e^x-1)} - x) \nu(dx) = r$$

条件 (C) を仮定したとき, 次のことが成立する.

1. (MEMM の存在) MEMM P^* が存在する .
2. (レヴィ過程) Z_t は P^* の下でもレヴィ過程で , その生成要素 (A^*, ν^*, b^*) は

$$A^* = \sigma^2$$

$$\nu^*(dx) = e^{\theta^*(e^x - 1)} \nu(dx)$$

$$b^* = b + \theta^* + \sigma^2 + \int_{\{|x| \leq 1\}} x d(\nu^* - \nu)$$

で与えられる .

[GLP & MEMM] モデルは , 多くの良い性質を有していることが知られており (宮原 (2003) を参照の事) , 幾何レヴィ過程モデルに対するオプション評価モデルのなかでは経済理論としての妥当性と一般性を最も兼ね備えたモデルである .

例えば , MEMM は指数効用を持っている投資家の最適化行動と関連付けることができる⁸⁾ .

2.4 代表的な幾何レヴィ過程モデルについて

2.4.1 Stable Process

幾何安定過程は株価過程として古くから注目されてきたものであり , Fama (1963) , Mandelbrot (1963) 以降多くの研究がある . ここで , 安定過程のレヴィ測度 $\nu(dx)$ は以下の形をしている :

$$\nu(dx) = \frac{c_1 I_{\{x < 0\}} + c_2 I_{\{x > 0\}}}{|x|^{1+\alpha}} dx, \quad 0 < \alpha < 2, \quad c_1, c_2 > 0, \quad c_1 + c_2 \geq 0.$$

また , このとき安定分布の特性関数 $\phi(u) = \exp(\psi(u))$ は次のようにかける :

$$\psi(u) = \begin{cases} \Gamma(-\alpha) \left(\cos \frac{\pi\alpha}{2} \right) c |u|^\alpha \left(1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}(u) \right) + i\tau u, & \text{for } \alpha \neq 1 \\ -\frac{\pi}{2} c |u| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(u) \log |u| \right) + i\tau u, & \text{for } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

ここで

$$c = c_1 + c_2,$$

$$\beta = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2},$$

$$\tau = \begin{cases} \frac{c_2 - c_1}{1 - \alpha} - b, & \text{if } 0 < \alpha < 1 \\ b + c_0 c, & \text{if } \alpha = 1 \\ \frac{c_1 - c_2}{1 - \alpha} + b, & \text{if } 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

ここに, $c_0 = \int_0^1 r^{-2}(\sin r - r) dr + \int_1^\infty r^{-2} \sin r dr$ である.

[G-Stable & MEMM] モデル

幾何安定過程の場合における MEMM の存在条件については次の結果が得られている.

命題 1 $c_1, c_2 > 0$ が成り立つならば, 条件 (C) を満たす θ^* は一意的に存在し, $\theta^* < 0$ である.

命題 1 から分かるように幾何安定過程の場合の MEMM の存在条件は非常にシンプルである. それゆえに, カリブレーション問題を解く場合などにおいて, パラメータの制約はほとんどないといって良い.

また, 幾何安定過程の場合には現在のところ MEMM 以外で適用可能な同値マルチンゲール測度は存在していないといえる. 実際, 本稿で注目した MMM, MCMM, ESMM は幾何安定過程に対しては存在しない.

2.4.2 scaled t-distribution

scaled t-分布は, 株価収益率分布を記述するモデルとして古くから分析されており, Praetz (1972), Blattberg and Gonedes (1974) など多くの分析が行われている. ここで, 確率変数 Z がパラメータ (n, b_0, γ) の scaled t-分布に従うとき, 確率変数 $Y := \frac{Z - b_0}{\gamma}$ は自由度 n の t-分布に従う. ただし, $n > 0, \gamma > 0$.

さて, t-分布は無分解可能分布であることから (Grosswald (1976)), scaled t-分布もまた無分解可能分布である. また, Takano (1989) において t-分布のレヴィ測度の形が与えられており, この結果から scaled t-分布のレヴィ測度の形を容易に得ることができる⁹⁾:

$$\nu(dx) = \frac{1}{|x|} \left(\int_0^\infty \frac{e^{-|x|\sqrt{2v}}}{\pi^2 v \left[J_{n/2}^2(\sqrt{2vn\gamma^2}) + Y_{n/2}^2(\sqrt{2vn\gamma^2}) \right]} dv \right) dx.$$

また, t-分布の特性関数形は, Hurst (1995) において解析的な形が与えられていることから, scaled t-分布の特性関数 $\phi(u)$ は簡単に分かる:

$$\phi(u) = e^{ib_0 u} \frac{K_{n/2}(\sqrt{n\gamma^2}|u|) \left(\sqrt{n\gamma^2}|u| \right)^{n/2}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2-1}}.$$

2.4.3 NIG Process

Barndorff-Nielsen (1995) による Normal Inverse Gaussian (NIG) 過程のレヴィ測度は次のように与えられる :

$$\nu(dx) = \frac{\delta \alpha \exp(\beta x) K_1(\alpha |x|)}{\pi |x|} dx.$$

ここで, \mathcal{K}_λ は次数 λ の第 2 種変形ベッセル関数である .

NIG 分布の特性関数 $\phi(u)$ は

$$\phi(u) = \exp \left[i b_0 u + \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + i u)^2} \right) \right]$$

とかける . また , NIG 分布の密度関数は

$$f(x; \alpha, \beta, \delta, b_0) = \frac{\alpha \delta}{\pi} \exp \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - b_0) \right) \frac{\mathcal{K}_1(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - b_0)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x - b_0)^2}}. \quad (2.9)$$

とかけることが知られている .

[G-NIG & MEMM] モデル

宮原 (2003, p88; 定理 7.2, 式 (7.12)) より , \mathbf{P}^* の下での $\{Z_t\}_{t \leq T}$ の生成要素 $(A^*, \nu^*(dx), b_0^*)_0$ は

$$\theta^* \in \left\{ \theta \in \mathbb{R} \mid b_0 + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^x - 1) e^{\theta(e^x - 1)} \nu(dx) = r \right\};$$

$$A^* = 0$$

$$\nu^*(dx) = \frac{\delta \alpha \exp[\beta x + \theta^*(e^x - 1)] \mathcal{K}_1(\alpha |x|)}{\pi |x|} dx$$

$$b_0^* = b_0$$

となる .

[G-NIG & ESMM] モデル

$(Z_t, \mathbb{P}^{\text{ESMM}})$ の生成要素 $(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\nu}(dx), \tilde{b}_0)_0$ は

$$h^* \in \left\{ h \in \mathcal{L} \mid b_1 + \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + h)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + h + 1)^2} \right) = r \right\};$$

$$\tilde{\sigma}^2 = 0$$

$$\tilde{\nu}(dx) = \frac{\delta\alpha \exp[(\beta + h^*)x] \mathcal{K}_1(\alpha|x|)}{\pi |x|} dx$$

$$\tilde{b}_0 = r + \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + h^* + 1)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + h^*)^2} \right)$$

となる．したがって，NIG 過程の場合には $(Z_t, \mathbb{P}^{\text{ESMM}})$ は再び NIG 過程に従う．

2.4.4 Variance Gamma Process

Madan and Seneta (1990), Madan *et al.* (1998) による Variance Gamma (VG) 過程のレヴィ測度 $\nu(dx)$ は次で与えられる：

$$\nu(dx) = C \frac{e^{-c_1|x|} I_{\{x<0\}} + e^{-c_2|x|} I_{\{x>0\}}}{|x|} dx, \quad C, c_1, c_2 > 0.$$

VG 過程においては

$$\int_{-1}^1 |x| \nu(dx) < \infty$$

が成り立っており，生成要素を $(\sigma^2, \nu(dx), b_0)_0$ の形で与えることができる．

VG 分布の特性関数 $\phi(u)$ は次のようにかける¹⁰⁾：

$$\phi(u) = e^{ib_0u} \left(\frac{1}{(1 + iu/c_1)(1 - iu/c_2)} \right)^C.$$

また，VG 過程の生成要素は $(0, \nu(dx), b_1)_1$ の形の表現も可能である．ここで， b, b_0, b_1 の間には次の関係がある：

$$b = b_0 + C \left(\frac{e^{-c_1} - 1}{c_1} - \frac{e^{-c_2} - 1}{c_2} \right),$$

$$b_1 = b_0 - C \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right).$$

[G-VG & MEMM] モデル

幾何 VG 過程に対する MEMM の存在条件については次の結果が分かっている (see Fujiwara and Miyahara (2003) or Miyahara and Novikov (2002))：

命題 2 (1) もし $c_2 \leq 1$ が成り立つならば，そのときには条件 (C) を満たす θ^* が一意的に存在し， $\theta^* < 0$ である．

(2) もし $c_2 > 1$ でありかつ $f(0) \geq r$ であるならば，そのときには条件 (C) を満たす θ^* が

一意的存在し, $\theta^* \leq 0$ である.

(3) もし $c_2 > 1$ でありかつ $f(0) < r$ であるならば, 条件 (C) を満たす θ^* は存在しない.

ここに

$$f(\theta) := b + \left(\frac{1}{2} + \theta^*\right) \sigma^2 + \int_{\{|x|>1\}} (e^x - 1)e^{\theta^*(e^x-1)} \nu(dx) \\ + \int_{\{|x|\leq 1\}} \left((e^x - 1)e^{\theta^*(e^x-1)} - x\right) \nu(dx)$$

である.

幾何 VG 過程モデルを MEMM で測度変換した場合のレヴィ過程 $(\{Z_t\}, \mathbf{P}^{\text{MEMM}})$ が持つ生成要素 $(A^*, \nu^*(dx), b_0^*)_0$ は次で与えられる:

$$A^* = \sigma^2, \\ \nu^*(dx) = e^{\theta^*(e^x-1)} \nu(dx), \\ b_0^* = b_0 + \theta^* \sigma^2.$$

ただし θ^* は

$$b_0 + C \left(\int_{-\infty}^0 \frac{1}{|x|} e^{-c_1|x|} (e^x - 1) e^{\theta(e^x-1)} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{|x|} e^{-c_2|x|} (e^x - 1) e^{\theta(e^x-1)} dx \right) = r \quad (2.10)$$

を満たすものとする.

[G-VG & ESMM] モデル

幾何 VG 過程の場合, (2.6) は

$$r = b_0 - C \left(\log \left(\frac{c_1 + h + 1}{c_1 + h} \right) + \log \left(\frac{c_2 - h - 1}{c_2 - h} \right) \right) \quad (2.11)$$

となる. 式 (2.11) を h について整理すると

$$\left(e^{(r-b_0)/C} - 1 \right) h^2 + \left[(c_2 - c_1) + \{(c_1 + 1) - (c_2 - 1)\} e^{(r-b_0)/C} \right] h \\ + c_1 c_2 - e^{(r-b_0)/C} (c_1 + 1)(c_2 - 1) = 0$$

となり, h についての 2 次の方程式となっている. そして, その判別式 D は

$$D = (c_1 + c_2)^2 \left(e^{(r-b_0)/C} - 1 \right)^2 + 4e^{(r-b_0)/C} > 0$$

となる．したがって， \mathcal{L} に属しているかどうかは別にして， h は少なくとも1つは存在することがわかる．さて，式 (2.11) を h について解くと

$$h = \frac{-\{(c_2 - c_1) + (c_1 - c_2 + 2)e^{(r-b_0)/C}\}}{2(e^{(r-b_0)/C} - 1)} \pm \frac{\sqrt{(c_1 + c_2)^2(e^{(r-b_0)/C} - 1)^2 + 4e^{(r-b_0)/C}}}{2(e^{(r-b_0)/C} - 1)} \quad (2.12)$$

となる．

$\tilde{\psi}$ が存在するためには， h は $c_1 + h > 0$ かつ $c_2 - h > 1$ という条件を満たさなければならない．よって，その条件を満たす $h^* (\in \mathcal{L})$ が求めれば，Esscher transformed martingale measure $\tilde{\mathbf{P}}$ は存在する．このとき $(\{Z_t\}, \mathbf{P}^{\text{ESMM}})$ は再び VG 過程に従い

$$C^{(\text{ESMM})} = C,$$

$$c_1^{(\text{ESMM})} = c_1 + h^*,$$

$$c_2^{(\text{ESMM})} = c_2 - h^*,$$

$$b_0^{(\text{ESMM})} = r + C \log \left(\frac{(c_1^{(\text{ESMM})} + 1)(c_2^{(\text{ESMM})} - 1)}{c_1^{(\text{ESMM})} c_2^{(\text{ESMM})}} \right)$$

となる¹¹⁾．ただし， h^* は $c_1 + h > 0$, $c_2 - h > 0$ を満たすものとする．また， h^* は (2.12) により与えられる．

2.4.5 Merton Jump-Diffusion Model

ジャンプ拡散過程として，Merton (1976) によるモデルに注目した．このモデルの原資産過程 $S_t = \exp(Z_t)$ は次のように与えられる：

$$Z_t = b_0 t + \sigma W_t + J_t. \quad (2.13)$$

ここで， W_t は標準ブラウン運動であり， J_t はレヴィ測度が $\nu(dx) = \lambda \rho(dx)$ ， $\lambda > 0$ の複合ポアソン過程である．

ρ は平均 m 分散 v の正規分布に従うと仮定した場合を特に Merton のジャンプ拡散過程と呼ぶ．このときの Z_t のレヴィ測度は次のようになる．

$$\nu(dx) = \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2v} \right\} dx, \quad \lambda > 0, v > 0.$$

また，特性関数 $\phi(u) = \exp(\psi(u))$ は

$$\psi(u) = iub_0 - \sigma^2 u^2 / 2 + \lambda \{ \exp(ium - vu^2 / 2) - 1 \}$$

とかける．

Z_t の分布（以下，Merton($b_0, \sigma^2, c, m, v; t$) と表記する）の特性量は容易に計算でき，

$$\text{平均： } b_0 t + c m t$$

$$\text{分散： } \sigma^2 t + c(m^2 + v)t$$

$$\text{歪度： } \frac{c m(m^2 + 3v)}{\sqrt{t}(\sigma^2 + c(m^2 + v))^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{尖度： } 3 + \frac{c(m^4 + 6m^2 v + 3v^2)}{t(\sigma^2 + c(m^2 + v))^2}$$

となる．

ここで，形式的に S_t の dynamics を次のように書くこととする：

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_{t-}} &= \mu dt + \sigma dW_t + d\hat{J}_t \\ &= \mu dt + \sigma dW_t + (Y - 1) dN_t \end{aligned} \quad (2.14)$$

ただし，

N_t ： intensity c の Poisson 過程

\hat{J}_t ： 複合 Poisson 過程 i.e. $\hat{J}_t = \sum_{i=1}^{N_t} (Y_i - 1)$ ，ただし， $N_t = 0$ のときは $\hat{J}_t = 0$ ．

また， $Y_i, i = 1, 2, \dots$ は独立同一分布に従う，正の値をとる確率変数．

$Y_i - 1$ ： 株価をジャンプさせるような情報が生じたときの株価の変化率．いま，時

点 τ を株価がジャンプした時点とすれば $\frac{S_{\tau_i} - S_{\tau_i-}}{S_{\tau_i-}} = Y_i - 1$ i.e. $S_{\tau_i} = S_{\tau_i-} \times Y_i$

y_i ： log stock price のジャンプ幅 (i.e. $y_i := \log Y_i = \log S_{\tau_i} - \log S_{\tau_i-}$)．ここで

y_i の分布は $\rho(dx)$ と同じ分布．

とする．このとき S_t は次のように書ける¹²⁾：

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp \left[(\mu - \sigma^2 / 2) t + \sigma W_t \right] \prod_{i=1}^{N_t} Y_i \\ &= S_0 \exp(Z_t), \quad Z_t = b_0 t + \sigma W_t + J_t. \end{aligned}$$

ただし

$$b_0 = \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \quad J_t \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{N_t} y_i$$

Merton モデル ([Merton & MCM] モデル)

Merton (1976) は, ジャンプ・リスクが漸近的に定数となることを仮定すればオプション価格は簡単な形で表現できることを示している. また, ジャンプが起こるというリスクは各証券に固有のものであると考えられる場合には, ジャンプ・リスクが漸近的に定数となる状況をつくることのできることも示している¹³⁾

このときの価格公式は次のようになることが示されている:

$$C = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{r_n T} C_{BS}(S, K, T, r_n, \sigma_n),$$

$$r_n = \bar{\mu} + \frac{n(m + v/2)}{T}, \quad \bar{\mu} = r - \lambda \{ \exp(m + v/2) - 1 \},$$

$$\sigma_n = \sigma^2 + \frac{nv}{T},$$

$$C_{BS}(S, K, T, r, \sigma) = SN(d) + Ke^{-rT} N(d - \sigma\sqrt{T}), \quad d = \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

[Merton & MEMM] モデル

($\{Z_t\}, \mathbf{P}^{\text{MEMM}}$) の生成要素 ($A^*, \nu^*(dx), b_0^*$)₀ は

$$\theta^* \in \left\{ \theta \in \mathbb{R} \left| b_0 + \left(\frac{1}{2} + \theta \right) \sigma^2 + c \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1) e^{\theta(e^x - 1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2v}\right) dx = r \right. \right\};$$

$$A^* = \sigma^2$$

$$\nu^*(dx) = e^{\theta^*(e^x - 1)} \nu(dx) = c \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2v} + \theta^*(e^x - 1)\right) dx$$

$$b_0^* = b_0 + \theta^* \sigma^2$$

となる.

[Merton & ESMM] モデル

$(\{Z_t\}, \mathbf{P}^{\text{ESMM}})$ の生成要素 $(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\nu}(dx), \tilde{b}_0)_0$ は

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2$$

$$\tilde{\nu}(dx) = \frac{c \exp[(m + vh^*/2)h^*]}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left[-\frac{\{x - (m + vh^*)\}^2}{2v}\right]$$

$$\tilde{b}_0 = b_0 + \sigma^2 h^*$$

となる。ただし、 h^* は

$$b_0 + \sigma^2 \left(h + \frac{1}{2}\right) + c \left(\exp\left[hm + \frac{v}{2}h^2\right]\right) \left(\exp\left[m + v\left(h + \frac{1}{2}\right)\right] - 1\right) = r$$

を満たすものとする。

したがって、このモデルのリスク中立確率密度関数は、Merton $(\tilde{b}_0, \tilde{\sigma}^2, c \exp[(m + vh^*/2)h^*], m + vh^*, v; t)$ なる分布に従う。

[Merton & MMM] モデル

$(\{Z_t\}, \mathbf{P}^{\text{MMM}})$ の生成要素 $(\hat{\sigma}^2, \hat{\nu}(dx), \hat{b}_0)$ は

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2,$$

$$\hat{\nu}(dx) = \frac{c(\eta x + 1)}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left\{-\frac{(x - m)^2}{2v}\right\} dx,$$

$$\hat{b}_0 = b_0 + \eta\sigma^2$$

ただし、

$$\eta = \frac{r - b_0 - \sigma^2/2 - c \{\exp(m + v/2) - 1\}}{\sigma^2 + c \{(m + v) \exp(m + v/2) - m\}}.$$

2.5 オプション価格の数値計算法

本稿ではオプション価格は Carr and Madan (1998) による高速フーリエ変換を用いた数値計算法によって計算している¹⁴⁾：

$$C_T(K) = S_0 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv \log K} \zeta_T(v) dv + (1 - e^{\log K - rT})^+ \right\}. \quad (2.15)$$

ここで

$$\zeta_T(v) = \frac{e^{-rT} \phi_T(v - i) - e^{ivrT}}{(iv + 1)iv}.$$

ただし, この表現は Cont and Tankov (2002, appendix A) により与えられたものである.

(2.15) はさらに

$$C_T(K) = \left\{ \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} e^{-ivk} \zeta_T(v) dv \right) + (1 - e^{k - rT})^+ \right\}$$

とかける¹⁵⁾.

上式の積分部分を次のように離散化する¹⁶⁾ :

$$C_T(k_u) = S_0 \left\{ \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{N} (j-1)(u-1)} x_j \right) + (1 - e^{k_u - rT})^+ \right\}, \quad u = 1, 2, \dots, N$$

ただし,

$$x_j := e^{ibv_j} \cdot \zeta_T(v_j), \quad \lambda\eta := \frac{2\pi}{N}$$

である.

注

1) $f(x) = e^x$ とすると, レヴィ過程に対する伊藤の公式より

$$\begin{aligned}
e^{U_t} &= 1 + \int_{0+}^t \eta \sigma_U e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \left(b_U + \frac{1}{2} \eta^2 \sigma_U^2 \right) e^{U_{s-}} ds + \int_{0+}^t \int_{|y| \leq 1} y e^{U_{s-}} \tilde{N}_P^{(U)}(dsdy) \\
&\quad + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \left(e^y e^{U_{s-}} - e^{U_{s-}} - e^{U_{s-}} y 1_{\{|y| \leq 1\}} \right) N_P^{(U)}(dsdy) \\
&= 1 + \int_{0+}^t \eta \sigma_U e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \left(b_U + \frac{1}{2} \eta^2 \sigma_U^2 \right) e^{U_{s-}} ds + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} y e^{U_{s-}} \tilde{N}_P^{(U)}(dsdy) \\
&\quad + \int_{0+}^t \int_{|y| > 1} y e^{U_{s-}} ds \nu_U(dy) + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^y - 1 - y) N_P^{(U)}(dsdy) \\
&= 1 + \int_{0+}^t \eta \sigma_U e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} y e^{U_{s-}} \tilde{N}_P^{(U)}(dsdy) \\
&\quad + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^y - 1 - y) N_P^{(U)}(dsdy) - \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^y - 1 - y) d\nu_U(dy) \\
&= 1 + \int_{0+}^t \eta \sigma e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{U_{s-}} \tilde{N}_P(dsdx) \\
&\quad + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^{\varphi(x)} - 1 - \varphi(x)) N_P(dsdx) - \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^{\varphi(x)} - 1 - \varphi(x)) \nu(dx) \\
&= 1 + \int_{0+}^t \eta \sigma e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{U_{s-}} \tilde{N}_P(dsdx) + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^{\varphi(x)} - 1 - \varphi(x)) \tilde{N}_P(dsdx) \\
&= 1 + \int_{0+}^t \eta \sigma e^{U_{s-}} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} e^{U_{s-}} (e^{\varphi(x)} - 1) \tilde{N}_P(dsdx)
\end{aligned}$$

2) $\tau := T - t$ とする. いま

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\check{\mathbf{P}}} \left[e^{-r(T-t)} S_T \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbf{E}^{\check{\mathbf{P}}} \left[e^{-r\tau} S_t \exp(Z_T - Z_t) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-r\tau} S_t \mathbf{E}^{\check{\mathbf{P}}} \left[\exp(Z_T - Z_t) \right] = e^{-r\tau} S_t \mathbf{E}^{\check{\mathbf{P}}} \left[\exp \{ i(-i) Z_\tau \} \right] = e^{-r\tau} S_t \exp[\tau \check{\psi}(-i)] \\
&= S_t \exp[(\check{\psi}(-i) - r)\tau]
\end{aligned}$$

とかけるので, $\{e^{-rT} S_T\}$ が $\check{\mathbf{P}}$ -martingale であるとは

$$\check{\psi}(-i) = r$$

が成り立つことをいう.

3)

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = 1 + \int_0^t \gamma_s \sigma Y_{s-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_s Y_{s-} x \tilde{N}_P(dsdx)$$

と

$$\left. \frac{d\check{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = 1 + \int_{0+}^t \eta \sigma Y_{s-} dW_s + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} Y_{s-} (e^{\varphi(x)} - 1) \tilde{N}_P(dsdx)$$

を比較すれば

$$\gamma_t = \eta$$

そして、さらに

$$\eta x = e^{\varphi(x)} - 1$$

が成り立っていればよいことが分かる。すなわち

$$\varphi(x) = \log(\eta x + 1)$$

であるから

$$\hat{\nu}(dx) = (\eta x + 1)\nu(dx)$$

とすればよい。また、このとき

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \sigma^2 \eta + b + \int_{|x| \leq 1} x(\hat{\nu} - \nu)(dx) \\ &= b + \left(\sigma^2 + \int_{\{|x| \leq 1\}} x^2 \nu(dx) \right) \eta \end{aligned}$$

である。そして、 η は

$$\hat{b} = r - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1 - x 1_{\{|x| \leq 1\}}) \hat{\nu}(dx)$$

が成り立つように選べばよい。

4)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\bar{\mathbf{P}}} \left[e^{-rT} (S_T - K)^+ \right] &= C^{(\text{Merton})}(K, T, S_T, r) \\ C^{(\text{Merton})}(K, T, S_T, r) &:= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(T) \mathbb{E} \left[C^{(\text{BS})}(V_n, T; K, \sigma^2, r) \right] \end{aligned} \quad (*)$$

が成り立つことを確認しておこう。ここで、 $\bar{\mathbf{P}}$ は mean-correcting martingale measure である。 \mathbf{P} の下での Z_1 の分布と $\bar{\mathbf{P}}$ の下での Z_1 の分布は、特性量の違いを除けば、同じ分布に従っているという点に注目しよう。さらにいえば $\mathbb{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [Y_1 - 1] = \mathbb{E}^{\mathbf{P}} [Y_1 - 1]$ である。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\bar{\mathbf{P}}} \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\bar{\mathbf{P}}} \left[(S_0 e^{Z_T} - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\bar{\mathbf{P}}} \left[(S_0 e^{Z_t} e^{Z_T - Z_t} - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

$S_t = S_0 e^{Z_t}$ は \mathcal{F}_t -可測であること、及び、 $e^{Z_T - Z_t}$ と \mathcal{F}_t は独立であることから

$$\begin{aligned} &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\bar{\mathbf{P}}} \left[(S_t e^{Z_T - Z_t} - K)^+ \right] \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\bar{\mathbf{P}}} \left[(S_t e^{Z_\tau} - K)^+ \right] \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\bar{\mathbf{P}}} \left[(S_t \exp \{ \bar{b}_0 \tau + \sigma W_\tau + J_\tau \} - K)^+ \right] \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\bar{\mathbf{P}}} \left[(S_t \exp \{ \bar{b}_0 \tau + \sigma W_\tau \} \exp \left(\sum_{j=1}^{N_\tau} y_j \right) - K)^+ \right] \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\bar{b}_0 = r - \frac{\sigma^2}{2} - c \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1) \rho(dx)$$

である．さらに， ρ は y_1 の分布と同一の分布であると仮定していたから

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1) \rho(dx) = \mathbb{E}[e^{y_1} - 1] = \mathbb{E}[Y_1 - 1]$$

が成り立つ．よって

$$\bar{b}_0 = r - \frac{\sigma^2}{2} - c\mathbb{E}[Y_1 - 1]$$

とかける．したがって

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\left(S_t \exp\left\{(r - \sigma^2/2 - c\mathbb{E}[Y_1 - 1])\tau + \sigma W_\tau\right\} \prod_{j=1}^{N_\tau} Y_j - K\right)^+\right] \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\left(S_t e^{-c\mathbb{E}[Y_1 - 1]\tau} \prod_{j=1}^{N_\tau} Y_j \exp\left\{(r - \sigma^2/2)\tau + \sigma W_\tau\right\} - K\right)^+\right] \end{aligned}$$

$P(N_t = n) = \frac{e^{-r\tau}(c\tau)^n}{n!}$ であることに注目すれば

$$= e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\left(S_t e^{-c\mathbb{E}[Y_1 - 1]\tau} \prod_{j=1}^n Y_j \exp\left\{(r - \sigma^2/2)\tau + \sigma W_\tau\right\} - K\right)^+\right] \frac{e^{-r\tau}(c\tau)^n}{n!}$$

とかける．ここで

$$\begin{aligned} C^{(\text{BS})}(\tau, S_t) &= \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[e^{-r\tau}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\left(S_t e^{(r - \sigma^2/2)\tau + \sigma W_\tau} - K\right)^+\right] \end{aligned}$$

であるから

$$\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[C^{(\text{BS})}\left(\tau, S_t e^{-c\mathbb{E}[Y_1 - 1]\tau} \prod_{j=1}^n Y_j\right)\right] \frac{e^{-r\tau}(c\tau)^n}{n!}$$

よって，(*) 式が成り立つ．

5)

定理 2.7 の条件 2 より， $\tilde{\nu}(dx) = \nu(dx)$ が成り立つとは，すなわち， $\varphi(x) = hx$ を意味している．したがって，このとき

$$\left.\frac{d\check{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left[h\sigma W_t - \frac{1}{2}h^2\sigma^2 t + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} hx N_p(dudx) - \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} (e^{hx} - 1) d\nu(dx)\right]$$

である．これはエッシャー変換：

$$\left.\frac{d\check{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{e^{hZ_t}}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{hZ_t}]}$$

に他ならない．実際，

$$\begin{aligned}
U_t &= h\sigma W_t - \frac{1}{2}h^2\sigma^2 t + \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} hxN_p(dudx) - \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} (e^{hx} - 1) d\nu(dx) \\
&= h\sigma W_t + bht - \frac{1}{2}h^2\sigma^2 t - bht + \int_{0+}^t \int_{|x|\leq 1} hxN_p(dudx) + \int_{0+}^t \int_{|x|>1} hxN_p(dudx) \\
&\quad - \int_{0+}^t \int_{|x|\leq 1} hxd\nu(dx) - \int_{0+}^t \int_{\mathbb{R}} (e^{hx} - 1 - hx1_{\{|x|\leq 1\}}) d\nu(dx) \\
&= h\sigma W_t + bht + \int_{0+}^t \int_{|x|\leq 1} hx\tilde{N}_p(dudx) + \int_{0+}^t \int_{|x|>1} hxN_p(dudx) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}h^2\sigma^2 t + bht + t \int_{\mathbb{R}} (e^{hx} - 1 - hx1_{\{|x|\leq 1\}}) \nu(dx) \right) \\
&= hZ_t - t\psi(-ih)
\end{aligned}$$

よって

$$e^{U_t} = e^{hZ_t - t\psi(-ih)} = \frac{e^{hZ_t}}{e^{t\psi(-ih)}} = \frac{e^{hZ_t}}{\phi_{Z_t}(-ih)} = \frac{e^{hZ_t}}{\mathbb{E}[e^{hZ_t}]}$$

6) エッシャー変換した場合の Lévy exponent $\tilde{\psi}(u)$ は

$$\tilde{\psi}(u) = \psi(u - ih) - \psi(-ih)$$

である．これは容易に確かめられる：

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(u) &= -\tilde{\sigma}^2 u^2 / 2 + i\tilde{b}u + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x|\leq 1\}}) \tilde{\nu}(dx) \\
&= -\sigma^2 u^2 / 2 + i \left(\sigma^2 h + iub + \int_{|x|\leq 1} x(e^{hx} - 1) \nu(dx) \right) u \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} (e^{i(u-ih)x} - e^{i(-ih)x} - iux e^{hx} 1_{\{|x|\leq 1\}}) \nu(dx) \\
&= -\sigma^2 u^2 / 2 + iu\sigma^2 h + b + \int_{\mathbb{R}} (e^{i(u-ih)x} - e^{i(-ih)x} - iux1_{\{|x|\leq 1\}}) \nu(dx) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2}(u - ih)^2 + \frac{\sigma^2}{2}(-ih)^2 + ib(u - ih) - ib(-ih) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} (e^{i(u-ih)x} - 1 - i(u-ih)x1_{\{|x|\leq 1\}} - e^{i(-ih)x} + 1 + i(-ih)x1_{\{|x|\leq 1\}}) \nu(dx) \\
&= \psi(u - ih) - \psi(-ih)
\end{aligned}$$

したがって，(2.5) より

$$\psi(-i(1+h)) - \psi(-ih) = r$$

が成り立つときにはエッシャー変換はマルチンゲール測度となる

7) いま，代表的な投資家は， m 枚の株を保有しているものとし，また，リスク回避的な効用関数 $u(x)$ ($u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$) をもっているものとする．また，時点 T において 1 単位当たり $\pi(S_T)$ の支払いがある，デリバティブ証券が存在するものとする．そして，投資家は時点 0 において，借り入れた資金でデリバティブ証券を ϖ 単位購入し， T 時点で清算するものとする．このときの投資家の時点 T での資産額は

$$W_T = mS_T + \varpi \left(\pi(S_T) - e^{rT} V(0) \right)$$

となる．

ここで，デリバティブ証券の価格 $V(0)$ は均衡状態にあるものと仮定しよう．したがって，このときデリバティブ証券に対する需給は一致している．すると，このことから

$$\Phi(\varpi) = \mathbb{E} \left[u \left(mS_T + \varpi \{ \pi(S_T) - e^{rT} V(0) \} \right) \right]$$

は $\varpi = 0$ のとき最大となる。なぜなら、もし $\varpi = 0$ のとき最大とならなければ、デリバティブ証券をさらに買うあるいは売ることによって、投資家は期待効用を改善できる。したがって、このときには、デリバティブ証券に対する需給は一致していないであろう。

さて

$$\begin{aligned}\Phi'(\varpi) &= E[\{\pi(S_T) - e^{rT}V(0)\}u'(W_T)] \\ \Phi''(\varpi) &= E[\{\pi(S_T) - e^{rT}V(0)\}^2u''(W_T)]\end{aligned}$$

である。よって

$$\Phi'(0) = E[\pi(S_T)u'(W_T)] - e^{rT}V(0)E[u'(W_T)] = 0$$

より

$$V(0) = e^{rT} \frac{E[\pi(S_T)u'(mS_T)]}{E[u'(mS_T)]}$$

を得る。 $u''(x) < 0$ より $\Phi''(\varpi) < 0$ となることから、上式は最適性のための必要十分条件となる。

ここで、効用関数として特にパラメータ $c > 0$ の power utility function を仮定する：

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-c}}{1-c} & c \neq 1 \text{ のとき} \\ \log x & c = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

このときには

$$u'(x) = x^{-c}$$

であるから

$$\begin{aligned}V(0) &= e^{-rT} \frac{E[\pi(S_T)\{mS_T\}^{-c}]}{E[(mS_T)^{-c}]} \\ &= e^{-rT} \frac{E[\pi(S_T)S_T^{-c}]}{E[S_T^{-c}]} \quad (2.16)\end{aligned}$$

となる。上式はすべてのデリバティブ証券に対して成り立たなければならない。したがって、デリバティブ証券として特に $\pi(S_T) = S_T$ なるものを仮定すれば (このとき $V(0) = S_0$ となる)、上式は

$$S_0 = S_0 e^{-rT} \left\{ \frac{\phi_{Z_1}(-i(1-c))}{\phi_{Z_1}(-i(-c))} \right\}^T \quad (2.17)$$

とかける：

$$\begin{aligned}S_0 &= e^{-rT} \frac{E[S_T^{1-c}]}{E[S_T^{-c}]} = e^{-rT} \frac{E[(S_0 e^{Z_T})^{1-c}]}{E[(S_0 e^{Z_T})^{-c}]} = e^{-rT} \frac{S_0^{1-c} E[(e^{Z_T})^{1-c}]}{S_0^{-c} E[(e^{Z_T})^{-c}]} = e^{-rT} S_0 \frac{E[e^{i(-i)(1-c)Z_T}]}{E[e^{i(-i)(-c)Z_T}]} \\ &= e^{-rT} S_0 \frac{\phi_{Z_T}(-i(1-c))}{\phi_{Z_T}(-i(-c))} \\ &= S_0 e^{-rT} \left\{ \frac{\phi_{Z_1}(-i(1-c))}{\phi_{Z_1}(-i(-c))} \right\}^T.\end{aligned}$$

(2.17) が成り立つということは、すなわち

$$\frac{\phi_{Z_1}(-i(1-c))}{\phi_{Z_1}(-i(-c))} = e^r$$

が成り立つということであるから、(2.6) より、 $-c = h^*$ が成り立っていることがわかる。よって (2.16) は

$$\begin{aligned}V(0) &= e^{-rT} \frac{E[\pi(S_T)S_T^{h^*}]}{E[S_T^{h^*}]} = e^{-rT} E\left[\frac{\pi(S_T)S_T^{h^*}}{E[S_T^{h^*}]}\right] \\ &= e^{-rT} E^{\hat{P}}[\pi(S_T)]\end{aligned}$$

となる。

8) Wu and Dai (2001, section 1,2) と宮原 (2003, pp102-103) にしたがってそのことを概観しよう。

いま、投資家は、コールオプションの売り手であるとし、また、パラメータ α の指数効用：

$$U = -e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0$$

をもっているものとする。このとき、指数効用を持つ投資家はリスク回避的であり、また、 $\alpha \rightarrow 0$ のときにはリスク中立的になる。ここで、議論の煩雑さを避けるために $r \equiv 0$ を仮定しよう。この投資家は、初期時点においてコールオプションを p_α で売り、その資金を証券市場で運用し、満期時点において発生する義務を果たす、すなわち T 時点において $\pi(S_T)$ を支払うものとする。このとき、満期時点 T において確定する、この投資からの最終的な損益 W_T は

$$W_T = p_\alpha - \pi(S_T) + \int_0^T \theta_1(t) dS_t$$

となる。このとき、 θ_1 は

$$\sup_{\{\theta_1(t)\}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [U(W_T)]$$

を満たす、自己充足的なポートフォリオが選ばれる。指数効用であることを仮定していたから、上式はさらに

$$\sup_{\{\theta_1(t)\}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[-\exp \left\{ -\alpha \left(p_\alpha + \int_0^T \theta_1(t) dS_t - \pi(S_T) \right) \right\} \right]$$

とかける。取引コストを考慮した市場モデルについての議論のところでしばしば用いられている、効用同値 (utility indifference) の考え方に基づけば

$$\sup_{\{\theta_1(t)\}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[-\exp \left\{ -\alpha \left(p_\alpha + \int_0^T \theta_1(t) dS_t - \pi(S_T) \right) \right\} \right] = \sup_{\{\theta_1(t)\}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[-\exp \left(-\alpha \int_0^T \theta_1(t) dS_t \right) \right]$$

が成り立つ。上式を対数変換し、一般に $-\sup_n A_n = \inf_n -A_n$ が成り立つことに注意して整理すると

$$p_\alpha = \frac{1}{\alpha} \log \inf_{\{\theta_1(t)\}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[\exp \left(-\alpha \left(\int_0^T \theta_1(t) dS_t - \pi(S_T) \right) \right) \right] - \frac{1}{\alpha} \log \inf_{\{\theta_1(t)\}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[\exp \left(-\alpha \int_0^T \theta_1(t) dS_t \right) \right]$$

を得る。また、指数効用の最適化問題に対して、Legendre transformation を用いることで、次の双対関係が得られることが知られている：

$$\sup_{\{\theta_1(t)\}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[-\exp \left\{ -\alpha \left(p_\alpha + \int_0^T \theta_1(t) dS_t - \pi(S_T) \right) \right\} \right] = -\exp \left(\alpha \sup_{\mathbf{Q} \in \mathbf{P}_{\alpha, e}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\pi(S_T)] - p_\alpha - \frac{1}{\alpha} H(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) \right\} \right) \quad (2.18)$$

ここで、 $\mathbf{P}_{\alpha, e}$ は \mathbf{P} に対して絶対連続で、かつ局所的に同値なマルチンゲール測度の集合をあらわすものとする。また、 $H(\mathbf{Q}|\mathbf{P})$ は \mathbf{P} への \mathbf{Q} の相対エントロピーをあらわすものとする：

$$H(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) := \begin{cases} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \log \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right) \right] & \text{if } \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

いま、(2.18) において、特に $p_\alpha = \pi(S_T) = 0$ とすれば

$$\begin{aligned} \sup_{\{\theta_1(t)\}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[-\exp \left(-\alpha \int_0^T \theta_1(t) dS_t \right) \right] &= -\exp \left(\alpha \sup_{\mathbf{Q} \in \mathbf{P}_{\alpha, e}} \left[-\frac{1}{\alpha} H(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) \right] \right) \\ &= -\exp [-H(\mathbf{P}^*|\mathbf{P})] \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$H(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}) := \inf_{\mathbf{Q} \in \mathbf{P}_{\alpha, e}} H(\mathbf{Q}|\mathbf{P})$$

とした。この \mathbf{P}^* は minimal entropy martingale measure と呼ばれる。

さらに，効用同値の関係式から，このとき

$$-\exp\left(\alpha \sup_{\mathbf{Q} \in \mathbf{P}_{\alpha, e}} \left\{ \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\pi(S_T)] - p_\alpha - \frac{1}{\alpha} H(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) \right\}\right) = -\exp[-H(\mathbf{P}^*|\mathbf{P})]$$

が成り立つ．この式を，対数変換して， p_α について整理すれば

$$p_\alpha = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathbf{P}_{\alpha, e}} \left[\mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\pi(S_T)] - \frac{1}{\alpha} H(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) \right] + \frac{1}{\alpha} H(\mathbf{P}^*|\mathbf{P})$$

を得る．双対関係を利用して得られるこの p_α の関係式から以下に述べる結果が従うことが示されている (see Fujiwara and Miyahara(2003, section 4)) .

1. $0 < \alpha < \beta \Rightarrow p_\alpha < p_\beta$
2. $\forall \alpha > 0; p_\alpha \geq \mathbb{E}^{\mathbf{P}^*}[\pi(S_T)]$
3. $\lim_{\alpha \downarrow 0} p_\alpha = \mathbb{E}^{\mathbf{P}^*}[\pi(S_T)]$

このことは，リスク回避度 α の異なる投資家間でオプション取引が行われ得ることを示しているといえよう．また， $\mathbb{E}^{\mathbf{P}^*}[\pi(S_T)]$ は，オプションの売り手にとってオプション価格の最低水準となっており，オプション価格評価の1つの目安となりうる．また，オプション価格の買い手に対しても，同様の議論により，上記の結果が従う (see Fujiwara and Miyahara(2003)) .

9) Takano (1989) において確率密度関数が

$$\Gamma(m + d/2) \left\{ \pi^{d/2} \Gamma(m) \right\}^{-1} (1 + |x|^2)^{-m-d/2}$$

で与えられる分布 $\mu(dx)$ のレヴィ測度 $\nu(dx)$ は

$$\begin{aligned} \nu(dx) &= \frac{2}{|x|^d} \left(\int_0^\infty g_m(2w) L_{d/2}(\sqrt{2w}|x|) dw \right) dx, \\ g_m(v) &= \frac{2}{\pi^2 v (J_m^2(\sqrt{v}) + Y_m^2(\sqrt{v}))}, \\ L_{d/2}(v) &= (2\pi)^{-d/2} v^{d/2} K_{d/2}(v) \end{aligned}$$

であることが示されている．ここに， $J_m(v), Y_m(v)$ はそれぞれ第1種，第2種のベッセル関数であり， $K_\nu(v)$ は次数 ν の修正ベッセル関数である．また， d は分布の次元を表す．

また，このときの特性関数のレヴィ・ヒンチンの標準形は

$$\phi(z) = \exp \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1 + |x|^2} \right) \frac{2}{|x|^d} \left(\int_0^\infty g_m(2w) L_{d/2}(\sqrt{2w}|x|) dw \right) dx \right]$$

である．

ここで，分布 $\mu(dx)$ として特に $d = 1, m = \frac{n}{2}$ として， $x \rightarrow \frac{t}{\sqrt{n}}$ に変数変換すると分布 $\mu(dx)$ は Student's t-分布となる．よって，Student の t-分布の特性関数 $\phi_{t\text{-分布}}(z) = \exp(\psi(z))$ は，先の結果から

$$\psi_{t\text{-分布}}(z) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left(e^{iz \frac{t}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{iz \frac{t}{\sqrt{n}}}{1 + |t/\sqrt{n}|^2} \right) \frac{1}{t/\sqrt{n}} \int_0^\infty g_{n/2}(2w) e^{-\sqrt{2w}|t/\sqrt{n}|} dw \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} dt$$

となる．ここで， $d = 1$ とすると

$$K_{1/2}(v) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} v^{-\frac{1}{2}} e^{-v}$$

であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{|x|^d} \left(\int_0^\infty g_m(2w) L_{d/2}(\sqrt{2w}|x|) dw \right) dx \\ &= \frac{2}{|x|} \left(\int_0^\infty g_m(2w) (\pi/2)^{1/2} (\sqrt{2w}|x|)^{-1/2} e^{-\sqrt{2w}|x|} \frac{1}{2}^{1/2} \pi^{-1/2} (\sqrt{2w}|x|)^{1/2} dw \right) dx \\ &= \frac{1}{|x|} \left(\int_0^\infty g_m(2w) e^{-\sqrt{2w}|x|} dw \right) dx \end{aligned}$$

とかける.

$\hat{z} = \frac{z}{\sqrt{n}}$ とすると, $\int_{\mathbb{R}} \frac{zx}{1+|x|^2} \frac{L_{d/2}(\sqrt{2w}|x|)}{|x|} dx = 0$ である (奇関数の積分) に注意すれば

$$\psi(\hat{z}) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\hat{z}t} - 1 \right) \frac{1}{|t|} \left(\int_0^\infty g_{n/2}(2w) e^{-\sqrt{2w}|t/\sqrt{n}|} dw \right) dt$$

ここで $w \rightarrow nv$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\hat{z}t} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{|t|} \int_0^\infty g_{n/2}(2vn) e^{-\sqrt{2v}|t|} n dv \right\} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\hat{z}t} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{|t|} \int_0^\infty \frac{2ne^{-\sqrt{2v}|t|}}{2\pi^2 vn \left[J_{n/2}^2(\sqrt{2vn}) + Y_{n/2}^2(\sqrt{2vn}) \right]} dv \right\} dt \end{aligned}$$

よって, Student の t-分布のレヴィ測度は

$$\frac{1}{|x|} \int_0^\infty \frac{e^{-|x|\sqrt{2w}}}{\pi^2 w \left[J_{n/2}^2(\sqrt{2wn}) + Y_{n/2}^2(\sqrt{2wn}) \right]} dw dx$$

である.

確率変数 Z がパラメータ (n, b_0, γ) の scaled t-分布に従うとき, 確率変数 $Y := \frac{Z-b_0}{\gamma}$ は自由度 n の t-分布に従う. よって, scaled t-分布の特性関数 $\phi(u)$ は

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{iu(b_0+\gamma Z)} \mu_{\text{t-分布}}(dz) \\ &= e^{iub_0} \int_{\mathbb{R}} e^{iu\gamma Z} \mu_{\text{t-分布}}(dz) \end{aligned}$$

ここで, 先の結果から

$$\phi_{\text{t-分布}}(u\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i(u\gamma)z} - 1 \right) \frac{1}{|z|} \int_0^\infty \frac{e^{-|z|\sqrt{2w}}}{\pi^2 w \left[J_{n/2}^2(\sqrt{2wn}) + Y_{n/2}^2(\sqrt{2wn}) \right]} dw dz$$

ここで, $\gamma z \rightarrow x$ として変数変換すると

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{|x/\gamma|} \int_0^\infty \frac{e^{-|x/\gamma|\sqrt{2w}}}{\pi^2 w \left[J_{n/2}^2(\sqrt{2wn}) + Y_{n/2}^2(\sqrt{2wn}) \right]} dw \right\} \frac{1}{\gamma} dx$$

さらに, $w \rightarrow \gamma^2 v$ に変数変換すると

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{|x|} \int_0^\infty \frac{e^{-|x|\sqrt{2v}}}{\pi^2 v \left[J_{n/2}^2(\sqrt{2vn\gamma^2}) + Y_{n/2}^2(\sqrt{2vn\gamma^2}) \right]} dv \right\} dx$$

10)

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \mathbb{E} \left[e^{iuZ_1} \right] \\ &= \exp \left[ib_0u + \int_{|x|>0} (e^{iux} - 1) \nu(dx) \right]\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_{|x|>0} (e^{iux} - 1) \nu(dx) &= \int_{|x|>0} (e^{iux} - 1) C \left(I_{\{x<0\}} e^{-c_1|x|} + I_{\{x>0\}} e^{-c_2|x|} \right) |x|^{-1} dx \\ &= C \left[\int_{x<0} (e^{iux} - 1) e^{c_1x} (-1)x^{-1} dx + \int_{x>0} (e^{iux} - 1) e^{-c_2x} x^{-1} dx \right]\end{aligned}$$

上式の第1項部分は

$$\begin{aligned}\int_{x<0} (e^{iux} - 1) e^{c_1x} (-1)x^{-1} dx &= - \int_{x<0} e^{c_1x} \left\{ \int_0^{iu} e^{xy} dy \right\} dx \\ &= - \int_0^{iu} \left\{ \int_{x<0} e^{(c_1+y)x} dx \right\} dy \\ &= - \int_0^{iu} \frac{1}{c_1+y} dy \\ &= - \log(c_1+y) \Big|_0^{iu} \\ &= - (\log(c_1+iu) - \log c_1) \\ &= - \log \left(1 + \frac{iu}{c_1} \right)\end{aligned}$$

となる．ここで3番目の等号が成り立つのは

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{-\frac{1}{\varepsilon}} e^{(c_1+y)x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{c_1+y} e^{(c_1+y)x} \Big|_{-\varepsilon}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{c_1+y} \left(e^{-(c_1+y)\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-(c_1+y)\varepsilon} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{c_1+y} \left(e^{-(c_1+y)\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-c_1\varepsilon} e^{-y\varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{c_1+y} (e^0 - 0) \\ &= \frac{1}{c_1+y}\end{aligned}$$

となるからである．ここで4番目の等号が成り立つのは， y は虚数であることから

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} e^{-y\varepsilon} < 2.$$

よって

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} e^{-(c_1+y)\varepsilon} = 0$$

となるからである．

また，第2項部分は

$$\begin{aligned}\int_{x<0} e^{-c_2x} (e^{iux} - 1) x^{-1} dx &= \int_{x<0} \left\{ \int_0^{iu} e^{xy} dy \right\} e^{-c_2x} dx = \int_0^{iu} \left\{ \int_{x<0} e^{(-c_2+y)x} dx \right\} dy \\ &= \int_0^{iu} \frac{1}{c_2-y} dy = - \log(c_2-y) \Big|_0^{iu} = - (\log(c_2-iu) - \log c_2) \\ &= - \log \left(1 - \frac{iu}{c_2} \right)\end{aligned}$$

となる．ここで3番目の等号が成り立つのは

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{1/\varepsilon}^{\varepsilon} e^{(-c_2+y)x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{-c_2+y} e^{yx} e^{-c_2x} \Big|_{1/\varepsilon}^{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{-c_2+y} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(e^{y\varepsilon} e^{-c_2\varepsilon} - e^{(-c_2+y)\frac{1}{\varepsilon}} \right) = \frac{1}{-c_2+y} \cdot (0-1) \\ &= \frac{1}{c_2-y} \end{aligned}$$

となるからである．よって

$$\begin{aligned} \int_{|x|>0} \left(e^{iux} - 1 \right) \nu(dx) &= -C \left(\log \left(1 + \frac{i u}{c_1} \right) + \log \left(1 - \frac{i u}{c_2} \right) \right) \\ &= \log \left((1 + i u/c_1) (1 - i u/c_2) \right)^{-C} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \phi(u) &= e^{ib_0 u} \exp \left[\int_{|x|>0} \left(e^{iux} - 1 \right) \nu(dx) \right] \\ &= e^{ib_0 u} \left(\frac{1}{(1 + i u/c_1)(1 - i u/c_2)} \right)^C \end{aligned}$$

11)

$$\tilde{\nu}(dx) = e^{hx} \nu(dx)$$

であるから

$$\int_{-1}^1 |x| \tilde{\nu}(dx) < \infty$$

が成り立ち， $(\sigma^2, \nu(dx), b_0)_0$ なる表現が可能である．それゆえ Esscher transformed measure の下での特性関数は，

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(u) &= \exp \left[i\tilde{b}_0 u + \int_{|x|>0} \left(e^{iux} - 1 \right) \tilde{\nu}(dx) \right] \\ &= \exp \left[i\tilde{b}_0 u + \int_{|x|>0} \left(e^{iux} - 1 \right) e^{hx} \nu(dx) \right] \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \int_{|x|>0} \left(e^{iux} - 1 \right) e^{hx} \nu(dx) &= \int_{|x|>0} \left(e^{iux} - 1 \right) C \left(I_{\{x<0\}} e^{-c_1|x|+hx} + I_{\{x>0\}} e^{-c_2|x|+hx} \right) |x|^{-1} dx \\ &= C \left[\int_{x<0} \left(e^{iux} - 1 \right) e^{(c_1+h)x} (-1)x^{-1} dx + \int_{x>0} \left(e^{iux} - 1 \right) e^{-(c_2-h)x} x^{-1} dx \right] \end{aligned}$$

であるから， $c_1 + h > 0$ ， $c_2 - h > 0$ が成り立っていることより，VG 過程 Z_t の特性関数を求めたときと同様にして

$$\tilde{\phi}(u) = e^{i\tilde{b}_0 u} \left(\frac{1}{(1 + i u/(c_1 + h))(1 - i u/(c_2 - h))} \right)^C$$

を得る．よって，このとき $\text{VG}(C, c_1 + h, c_2 - h, \tilde{b}_0)$ となる．また， $h = h^*$ のときには

$$\tilde{b}_0 = r + C \log \left(\frac{(c_1 + h^* + 1)(c_2 - h^* - 1)}{(c_1 + h^*)(c_2 - h^*)} \right)$$

が成り立つ．

¹²⁾ いま，株価がジャンプした時点を $\tilde{\tau}_j$ ， $j = 1, 2, \dots, N_T$ ($N_T \sim P_o(cT)$) で表すこととする．また，初期時点においてはジャンプは起こらないものとする．ここで表記を簡単にするために， $\tau_{j=0} = 0$ ， $\tau_j = \tilde{\tau}_j$ ， $j = 1, 2, \dots, N_T$ とする．株

価過程 $\{S_t\}_{t \leq T}$ が (2.14) なる dynamics に従うとき、区間 $[\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, N_T$ においては、この区間内で新たにジャンプすることはないため

$$dS_t = \mu S_{\tau_j} dt + \sigma S_{\tau_j} dW_t \quad (*)$$

となり、新たにジャンプする時点 τ_{j+1} では

$$S_{\tau_{j+1}} = S_{\tau_{j+1}-} \times Y_{j+1} \quad (**)$$

である。いま、 $t \in [0, \tau_1)$ において S_t は、(*) 及び伊藤の公式より

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]$$

と表せる。また、Brown 運動 W_t は連続的に変化するのであったから

$$\begin{aligned} S_{\tau_1-} &= S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau_1 - + \sigma W_{\tau_1-} \right] \\ &= S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau_1 + \sigma W_{\tau_1} \right] \end{aligned}$$

である。ここで、(**) より

$$S_{\tau_1} = S_0 \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau_1 + \sigma W_{\tau_1} \right] \cdot Y_1 \quad (***)$$

となる。また同様に、 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ においては、(*) 及び伊藤の公式より

$$S_t = S_{\tau_1} \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - \tau_1) + \sigma (W_t - W_{\tau_1}) \right]$$

となるから、(**), (***) 及び Brown 運動の連続性より

$$\begin{aligned} S_{\tau_2} &= S_{\tau_1} \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (\tau_2 - \tau_1) + \sigma (W_{\tau_2} - W_{\tau_1}) \right] \cdot Y_2 \\ &= S_0 \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau_2 + \sigma W_{\tau_2} \right] \cdot Y_1 \cdot Y_2 \end{aligned}$$

となる。以下これを繰り返していけば、

$$S_{\tau_{N_T}} = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau_{N_T} + \sigma W_{\tau_{N_T}} \right] \prod_{i=1}^{N_T} Y_i$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T \right] \prod_{i=1}^{N_T} Y_i \\ &= S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T + \sum_{i=1}^{N_T} y_i \right] \end{aligned}$$

ただし、

$$\prod_{i=1}^0 Y_i := 1 \quad (\text{i.e. } \sum_{i=1}^0 y_i := 0)$$

が成り立つものとする。

この証明は Lamberton *et. al.* (1996, pp143-144) を参照した。

¹³⁾ いま、株価 S_t は、次の確率微分方程式：

$$dS_t = \mu S_{t-} dt + \sigma S_{t-} dW_t + (Y - 1) S_{t-} dN_t$$

の解であるものとする。このとき、ヨーロッパ型コールオプション (条件付請求権) $C(t, S_t) \in C^2$ は (ヨーロッパ型コールオプションは近似的に C^2 -級であると考えられる), 伊藤の公式 (Protter(1990,p74;theorem 33)) より

$$\begin{aligned} C(t, S_t) - C(0, 1) &= \int_0^t C_u du + \int_{0+}^t C_S(u, S_{u-}) dS_u + \frac{1}{2} \int_{0+}^t C_{SS} d[S, S]_u^c \\ &\quad + \sum_{0 < u \leq t} \{C(u, S_u) - C(u, S_{u-}) - C_S(u, S_{u-}) \Delta S_u\} \end{aligned}$$

とかける。ここで

$$d[S, S]_t^c = \sigma^2 S_{t-}^2 dt$$

であり, また, κ でジャンプする時点を表すことにすると, $\Delta S_{\kappa} := S_{\kappa} - S_{\kappa-} = (Y - 1)S_{\kappa-}$ であり, ジャンプしないときには $\Delta S_t = 0$ となること, 及び $S_{\kappa} = S_{\kappa-} Y$ であることに注目すれば

$$\begin{aligned} &\sum_{0 < u \leq t} \{C(u, S_u) - C(u, S_{u-}) - C_S(u, S_{u-}) \Delta S_u\} \\ &= \sum_{j=1}^{N_t} \left(C(\kappa_j, S_{\kappa_j} - Y_j) - C(\kappa_j, S_{\kappa_j-}) - (Y_j - 1)S_{\kappa_j-} C_S(\kappa_j, S_{\kappa_j-}) \right) \\ &= \int_{0+}^t \{C(u, S_{u-Y}) - C(u, S_{u-}) - (Y - 1)S_{u-} C_S(u, S_{u-})\} dN_t \\ &= \int_{0+}^t \left\{ \left(\frac{C(u, S_{u-Y})}{C(u, S_{u-})} - 1 \right) C(u, S_{u-}) \right\} dN_t - \int_{0+}^t (Y - 1)S_{u-} C_S(u, S_{u-}) dN_t \end{aligned}$$

とかける。ただし

$$\int_{0+}^t g(u, Y) dN_u := \sum_{j=1}^{N_t} g(\kappa_j, Y_j)$$

とした。このことから

$$\begin{aligned} C(t, S_t) - C(0, 1) &= \int_{0+}^t \left\{ C_u + \mu S_{u-} C_S(u, S_{u-}) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_{u-}^2 C_{SS}(u, S_{u-}) \right\} dt \\ &\quad + \int_{0+}^t \sigma S_{u-} C_S(u, S_{u-}) dW_u + \int_{0+}^t \left\{ \left(\frac{C(u, S_{u-Y})}{C(u, S_{u-})} - 1 \right) C(u, S_{u-}) \right\} dN_t \end{aligned}$$

とかける。これは, 形式的に次のようにかける:

$$\frac{dC(t, S_t)}{C(t, S_{t-})} = \mu_c dt + \sigma_c dW_t + (Y_c - 1) dN_t$$

$$\mu_c := \frac{C_t(t, S_{t-}) + \mu S_{t-} C_S(t, S_{t-}) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_{t-}^2 C_{SS}(t, S_{t-})}{C(t, S_{t-})} \quad (1)$$

$$\sigma_c := \frac{\sigma S_{t-} C_S(t, S_{t-})}{C(t, S_{t-})} \quad (2)$$

$$Y_c := \frac{C(t, S_{t-Y})}{C(t, S_{t-})}$$

ここで, $E[N_t - N_s] = E[N_{t-s}] = c(t - s)$ であるから

$$E[dN_t] = c dt$$

とかけよう。このことから, 条件付請求権 C の単位時間当たりの期待収益率は

$$E \left[\frac{dC/C}{dt} \right] = \mu_c + c E \left[\frac{C(t, S_{t-Y})}{C(t, S_{t-})} - 1 \right]$$

となる .

そして , 株に ω_1 単位 , 条件付請求権に ω_2 単位投資するポートフォリオの価値 P は

$$P = \omega_1 S_t + \omega_2 C(t, S_t)$$

となる . ここで , $P := f(S_t, C(t, S); \omega_1, \omega_2) \in C^2$ とすると

$$f_S = \omega_1, f_C = \omega_2, f_{SS} = f_{CC} = f_{SC} = f_{CS} = 0$$

となることに注目して , 伊藤の公式を適用すれば

$$\begin{aligned} dP &= \omega_1 dS_t + \omega_2 dC(t, S_t) \\ &= \{\omega_1 \mu S_{t-} + \omega_2 \mu_c C(t, S_{t-})\} dt + \{\omega_1 \sigma S_{t-} + \omega_2 \sigma_c C(t, S_{t-})\} dW_u \\ &\quad + \{\omega_1 (Y - 1) S_{t-} + \omega_2 (Y_c - 1) C(t, S_{t-})\} dN_t \end{aligned}$$

とかける . ここで , 株への投資比率 w を

$$w := \frac{\omega_1 S_{t-}}{\omega_1 S_{t-} + \omega_2 C(t, S_{t-})} = \frac{\omega_1 S_{t-}}{P}$$

と定めると

$$\frac{dP}{P} = \{w\mu + (1-w)\mu_c\} dt + \{w\sigma + (1-w)\sigma_c\} dW_t + \{w(Y-1) + (1-w)(Y_c-1)\} dN_t$$

とかける .

ここで , もし intensity $c = 0$ (i.e. ジャンプが起こらないケース) の場合には

$$w^* \sigma + (1-w^*) \sigma_c = 0$$

すなわち

$$w^* = \frac{\sigma_c}{\sigma_c - \sigma} \tag{3}$$

となるような投資戦略を行った場合には

$$E \left[\frac{dP/P}{dt} \right] = w^* \mu + (1-w^*) \mu_c$$

$$V \left[\frac{dP/P}{dt} \right] = 0$$

となる . 無裁定価格理論によれば , 無リスクの証券の収益率は唯一であるから

$$w^* \mu + (1-w^*) \mu_c = r$$

が成り立つ . これは , また , $w^* r + (1-w^*) r = r$ であることに注目すれば

$$w^* (\mu - r) = (w^* - 1) (\mu_c - r)$$

とかける . よって , (3) を代入して整理すると

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu_c - r}{\sigma_c}$$

あるいは

$$\mu_c = \frac{\mu - r}{\sigma} \sigma_c + r \tag{4}$$

とかける．(4) に (1), (2) を代入して整理すると, $c = 0$ より $S_{t-} = S_t$ となることに注意して,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}(t, S) + rSC_S - rC(t, S) + C_t(t, S) = 0 \quad (5)$$

を得る．これは, Black-Scholes 偏微分方程式としてよく知られた式である．

また, $c \neq 0$ の場合にも, 先程と同じ投資戦略 w^* を行った場合には

$$\begin{aligned} \frac{dP^*}{P^*} &= \{w^* \mu + (1 - w^*) \mu_c\} dt + \{w^*(Y - 1) + (1 - w^*)(Y_c - 1)\} dN_t \\ &= \mu^* dt + (Y^* - 1) dN_t \end{aligned}$$

となる．ただし

$$\mu^* := w^* \mu + (1 - w^*) \mu_c \quad (6)$$

$$Y^* := w^* Y + (1 - w^*) Y_c \quad (7)$$

ここで, 証券市場には m 種類の株があると仮定する;

$$dS_j(t) = \mu_j S_j(t-) dt + \sigma_j S_j(t-) dW_j(t) + (Y_j - 1) S_j(t-) dN_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

さらに, ジャンプのリスクは各証券に固有のリスクであるものと仮定する．すなわち, $(Y_j - 1) dN_j(t) \quad j = 1, \dots, m$ は独立であるものと仮定する．いま, j 番目の株式に対して先程と同様の投資戦略 w^* を行えば, このときのポートフォリオの価値 P_j^* に対して

$$\frac{dP_j^*}{P_j^*} = \mu_j^* dt + (Y_j^* - 1) dN_j(t), \quad j = 1, \dots, m$$

が成り立つ．また

$$E[(Y_j^* - 1) dN_j(t)] = c_j k_j dt$$

とかける．ただし

$$k_j := E[Y_j^* - 1]$$

とした．これら m 種類のポートフォリオ P_j^* にそれぞれ $x_j, \sum_{j=1}^m x_j = 1$ の割合で投資するポートフォリオ H を考える．このとき, H に対して

$$\frac{dH}{H} = \mu_H dt + (Y_H - 1) dN_t^{(H)}$$

とかける (ポートフォリオ P の dynamics を求めたときと同様の議論による．ただし, j 番目の証券への投資比率 x_j は $x_j = \alpha_j/m, \sum_{j=1}^m \alpha_j = m$ なる表現が可能であるものとする)．ここで

$$\mu_H := \sum_{j=1}^m x_j \mu_j^*,$$

$$(Y_H - 1) dN_t^{(H)} := \sum_{j=0}^m x_j (Y_j^* - 1) dN_j(t) = \frac{\sum_{j=0}^m \alpha_j (Y_j^* - 1) dN_j(t)}{m}$$

とした．このとき, ジャンプするリスクが各証券に固有のものであるとの仮定から, Kolmogorov の大数の強法則 (see 伊藤 (1991,p200)) より

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j (Y_j^* - 1) dN_j(t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \alpha_j c_j k_j^* dt \quad \text{a.e.}$$

が成り立っている．ゆえに，十分大きな m に対して，近似的に

$$(Y_H - 1)dN_t^{(H)} \approx \sum_{j=0}^m x_j c_j k_j^* dt$$

がほとんど確実に成り立っていよう．それゆえ， m が十分大きいときには，ポートフォリオ H を保有するリスクはほぼ 0 に等しいといえる．したがって， H の瞬間的な期待収益率は安全証券収益率 r に等しいといってしまうてよいだろう：

$$E \left[\frac{dH/H}{dt} \right] = \sum_{j=0}^m x_j (\mu_j^* + c_j k_j^*) = r.$$

いま， $\sum_{j=1}^m x_j = 1$ であることに注目すれば，上式より

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \alpha_j (\mu_j^* + c_j k_j^* - r) = 0$$

とかける．これより，任意の j に対して

$$\mu_j^* + c_j k_j^* = r$$

が成り立っていることがわかる．よって，上式に (6), (7) を代入すれば

$$w^* (\mu + cE[Y - 1] - r) = (w^* - 1)(\mu_c + cE[Y_c - 1] - r)$$

を得る (表記を簡単にするために添え字は省いた)．さらに，(3) を代入して整理すれば

$$\mu_c + cE[Y_c - 1] - r = \frac{\sigma_c}{\sigma} (\mu + cE[Y - 1] - r)$$

を得る．さらに，(1), (2) を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 S_{t-}^2 C_{SS}(t, S_{t-}) + (r - cE[Y_1 - 1]) S_{t-} C_S(t, S_{t-}) \\ + C_t(t, S_{t-}) - rC(t, S_{t-}) + cE[C(t, S_{t-}Y) - C(t, S_{t-})] = 0 \end{aligned}$$

を得る．さらに， $\tau := T - t$ を用いれば，上式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 S_{t-}^2 C_{SS}(\tau, S_{t-}) + (r - cE[Y_1 - 1]) S_{t-} C_S(\tau, S_{t-}) \\ - C_\tau(\tau, S_{t-}) - rC(\tau, S_{t-}) + cE[C(\tau, S_{t-}Y) - C(\tau, S_{t-})] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

とかける．(8) は条件付請求権 C が満たすべき微分・積分方程式である．ただし， C は境界条件

$$C(\tau, 0) = 0$$

$$C(0, S_T) = \max(0, S_T - K)$$

を満たしているものとする．

このとき，(8) 式の解 $C(\tau, S_t)$ は

$$C(\tau, S_t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) E \left[C^{(\text{BS})}(V_n, \tau; K, \sigma^2, r) \right]$$

となる．ただし

$$P_n(\tau) := \frac{e^{-c\tau} (c\tau)^n}{n!},$$

$$V_n := S_{t-} \prod_{j=1}^n Y_j e^{-c\tau E[Y_1 - 1]}$$

である .

(8) 式の解 $C(\tau, S_t)$ が

$$H(\tau, S_{t-}) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[C^{(\text{BS})} \left(S_{t-} \prod_{j=1}^n Y_j e^{-c\tau \mathbb{E}[Y_1 - 1]}, \tau; K, \sigma^2, r \right) \right] \frac{e^{-c\tau} (c\tau)^n}{n!} \quad (*)$$

で与えられるということは , 実際以下のようにして示されている (Merton(1976, pp141-142; appendix)) . まず , $H(\tau, S_{t-})$ を S_{t-} について微分すれば

$$H_S(\tau, S) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n Y_j e^{-c\tau \mathbb{E}[Y_1 - 1]} C_V^{(\text{BS})} \right]$$

となる (S_{t-} を S と略記する) . よって

$$SH_S(\tau, S) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \mathbb{E} \left[V_n C_V^{(\text{BS})} \right] \quad (9)$$

を得る . 同様にして

$$S^2 H_{SS}(\tau, S) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \mathbb{E} \left[V_n^2 C_{VV}^{(\text{BS})} \right] \quad (10)$$

を得る . また

$$H_\tau(\tau, S) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[C^{(\text{BS})} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} P_n(\tau) + P_n(\tau) \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} C^{(\text{BS})}(V_n, \tau) \right]$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P_n(\tau) &= \frac{-ce^{-c\tau} (c\tau)^n}{n!} + \frac{e^{-c\tau} cn(c\tau)^{n-1}}{n!} = -cP_n + c \frac{e^{-c\tau} (c\tau)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} C^{(\text{BS})}(V_n, \tau) &= -c\mathbb{E}[Y_1 - 1] S \prod_{j=1}^n Y_j \exp(-c\mathbb{E}[Y] \tau) C_V^{(\text{BS})} + C_\tau^{(\text{BS})} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} H_\tau(\tau, S) &= -cH(\tau, S) - c\mathbb{E}[Y_1 - 1] \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \mathbb{E} \left[V_n C_V^{(\text{BS})} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \mathbb{E} \left[C_\tau^{(\text{BS})} \right] \\ &\quad + c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c\tau)^{n-1} e^{-c\tau}}{(n-1)!} \mathbb{E} \left[C^{(\text{BS})} \right] \\ &= -cH(\tau, S) - c\mathbb{E}[Y_1 - 1] SH_S + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \mathbb{E} \left[C_\tau^{(\text{BS})} \right] \\ &\quad + c \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\tau) \mathbb{E} \left[C^{(\text{BS})}(V_{m+1}, \tau; K, \sigma^2, r) \right] \end{aligned}$$

とかける . ここで , $m := n - 1$ とした . したがって

$$\begin{aligned} &-c\mathbb{E}[Y_1 - 1] SH_S - H_\tau(\tau, S) \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \mathbb{E} \left[C_\tau^{(\text{BS})} \right] + cH(\tau, S) - c \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\tau) \mathbb{E} \left[C^{(\text{BS})}(V_{m+1}, \tau; K, \sigma^2, r) \right] \quad (11) \end{aligned}$$

を得る．また

$$\begin{aligned} E[H(\tau, SY)] &= E \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) E \left[C^{(\text{BS})}(V_n Y, \tau; K, \sigma^2, r) \right] \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) E \left[C^{(\text{BS})}(V_{(n+1)}, \tau; K, \sigma^2, r) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

となる．以上の結果 (9) ~ (12) を下式の左辺に代入することで，下式右辺を得る．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 H_{SS}(\tau, S) + (r - cE[Y_1 - 1])SH_S(\tau, S) - H_\tau(\tau, S) - rH(\tau, S) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) E \left[\frac{1}{2} \sigma^2 V_n^2 C_{VV}^{(\text{BS})} + rV_n C_V^{(\text{BS})} - C_\tau^{(\text{BS})} - rC^{(\text{BS})} \right] \\ &\quad - cE[Y - 1]SH_S + cE[Y_1 - 1]SH_S + cH(\tau, S) - c \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\tau) E \left[C^{(\text{BS})}(V_{m+1}, \tau; K, \sigma^2, r) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) E \left[\frac{1}{2} \sigma^2 V_n^2 C_{VV}^{(\text{BS})} + rV_n C_V^{(\text{BS})} - C_\tau^{(\text{BS})} - rC^{(\text{BS})} \right] - c \{ E[H(\tau, SY) - H(\tau, S)] \} \end{aligned}$$

ここで， $c = 0$ の場合には (5) 式が成り立っていたから，任意の n に対して

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V_n^2 C_{VV}^{(\text{BS})} + rV_n C_V^{(\text{BS})} - C_\tau^{(\text{BS})} - rC^{(\text{BS})} = 0$$

が成り立つことが分かる．よって

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 H_{SS}(\tau, S) + (r - cE[Y_1 - 1])SH_S(\tau, S) - H_\tau(\tau, S) - rH(\tau, S) + c \{ E[H(\tau, SY) - H(\tau, S)] \} = 0$$

を得る．ゆえに，(*) は (8) 式を満たしている．

また， $S = 0$ ならば $V_n = 0$ となること，及び Black-Scholes formula の性質：

$$C^{(\text{BS})}(0, \tau; K, \sigma^2, r) = 0$$

より

$$H(\tau, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) E \left[C^{(\text{BS})}(0, \tau) \right] = 0$$

が成り立つ．また，Black-Scholes formula の性質：

$$C^{(\text{BS})}(V_n, 0; K, \sigma^2, r) = \max(0, V_n - K)$$

より

$$E \left[C^{(\text{BS})}(V_n, 0; K, \sigma^2, r) \right] \leq E[V_n] = S(1 + E[Y_1 - 1])^n$$

が成り立つ．このことから

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\tau) E \left[C^{(\text{BS})} \right] &\leq \lim_{t \rightarrow T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S e^{-c\tau \{ (1 + E[Y_1 - 1])^n \}}}{n!} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} S e^{-c\tau} \left\{ e^{(1 + E[Y_1 - 1])c\tau} - 1 \right\} \quad \left(e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \text{より} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0} H(\tau, S) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[P_0(\tau) \mathbb{E} \left[C^{(\text{BS})}(V_0, \tau) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\tau) \mathbb{E} \left[C^{(\text{BS})}(V_n, \tau) \right] \right] \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[P_0(\tau) \mathbb{E} \left[C^{(\text{BS})}(V_0, \tau) \right] \right] \\ &= \max(0, S - K).\end{aligned}$$

ゆえに，(*) は境界条件を満たす．

次に， ρ が特に平均 m 分散 v の正規分布に従うものとした場合には

$$C_{\text{Merton}}(S, K, r, T, \sigma, m, v, c) = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-cT} \frac{(cT)^n}{n!} e^{r_n T} C_{\text{BS}}(S, K, T, r_n, \sigma_n) \quad (2.19)$$

が成り立つことを確認する．ただし， $N_T = n$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$ が実現した下で

$$\begin{aligned}r_n &= \bar{\mu} + \frac{n(m + v/2)}{T} \\ \sigma_n^2 &= \sigma^2 + \frac{nv}{T}\end{aligned}$$

であるものとする．ここで

$$\bar{\mu} = r - c\{\exp(m + v/2) - 1\}.$$

いま

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ = e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} \left[\left(S_t e^{-c\mathbb{E}[Y_1 - 1]\tau} \exp \left\{ (r - \sigma^2/2)\tau + \sigma W_\tau + \sum_{j=1}^{N_\tau} y_j \right\} - K \right)^+ \right] \frac{e^{-r\tau} (c\tau)^n}{n!}\end{aligned}$$

が成り立っていた．ここで， y_i は平均 m ，分散 v の正規分布に従っていたから，上式の右辺の期待値内にある，べき指数部分は

$$\begin{aligned}\text{平均} & \left(r - c\mathbb{E}[Y_1 - 1] - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{nm}{\tau} \right) \tau \\ \text{分散} & \left(\sigma^2 + \frac{nv}{\tau} \right) \tau\end{aligned}$$

の正規分布に従っている．このことから

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} \left[\left(S_t \exp \left\{ \bar{b}_0 \tau + \sigma W_\tau + \sum_{j=1}^{N_\tau} y_j \right\} - K \right)^+ \right] \\ = e^{r_n \tau} \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} \left[e^{-r_n \tau} \left(S_t \exp \left\{ (r_n - \sigma^2/2 - vn/\tau)\tau + \sqrt{\sigma^2 + nv/\tau} W_\tau \right\} - K \right)^+ \right] \quad (*)\end{aligned}$$

とかける．ただし

$$r_n := r - c\mathbb{E}[Y_1 - 1] + \frac{nm}{\tau} + \frac{nv/2}{\tau}$$

とした．ここで

$$C^{(\text{BS})}(\tau, S_t; K, \sigma, r) = \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} \left[e^{-r\tau} \left(S_t e^{(r - \sigma^2/2)\tau + \sigma W_\tau} - K \right)^+ \right]$$

であったことから

$$(*) = e^{rnT} C_{BS}(S, K, \tau, r_n, \sigma_n)$$

とかける．ここに

$$\sigma_n^2 := \sigma^2 + \frac{nv}{\tau}$$

とした．また， Y_1 は対数正規分布に従っており，その平均は

$$E[Y_1] = \exp\left(m + \frac{v}{2}\right)$$

であるから

$$r_n = \bar{\mu} + \frac{n(m + v/2)}{\tau},$$

$$\bar{\mu} = r - c\{\exp(m + v/2) - 1\}$$

とかける．以上から，(2.19) が成り立つ．

以上の議論は，Merton(1976) を参照した．

14) Cont and Tankov (2002, appendix A) により与えられたものである：

$$C_T(K) = S_0 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv \log K} \zeta_T(v) dv + \left(1 - e^{\log K - rT}\right)^+ \right\}. \quad (1)$$

ここで

$$\zeta_T(v) = \frac{e^{-rT} \phi_T(v - i) - e^{ivrT}}{(iv + 1)iv}.$$

本論文では，ヨーロッパ型コールオプションの価格を求めるために (1) の表現を利用している．

さて， $t = 0$ 時点でのヨーロッパ型コールオプションの価格は次で与えられるものとする：

$$C(S_0, K, T) := e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[(S_T - K)^+ \right] \quad (2)$$

ただし， $\{Z_t\}_{t \leq T}$ は同値 martingale 測度 \mathcal{Q} の下での幾何 Lévy 過程であるものとする．また，このときの log stock price $s_T := \log(S_T/S_0) = Z_T$ ， $S_0 \neq 0$ の密度関数を $q_T(s)$ と表し，これから定まる特性関数を $\phi_T(u)$ と書き表すことにする：

$$\phi_T(u) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} q_T(s) ds.$$

また，このときの特性関数 $\phi_T(u)$ は次の関係を満たしている．

$$\begin{aligned} \phi_T(u) &= \exp \left[T \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 + ibu + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux 1_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(x) dx \right) \right] \\ b &= r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1 - iux 1_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(x) dx \end{aligned}$$

さて，(2) はさらに

$$\begin{aligned} C(S_0, K, T) &= e^{-rT} S_0 \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[\left(\frac{S_T}{S_0} - \frac{K}{S_0} \right)^+ \mid S_0 \right] \\ &= e^{-rT} S_0 \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[\left(e^{\log(S_T/S_0)} - e^{\log(K/S_0)} \right)^+ \mid S_0 \right] \end{aligned}$$

ここで, $k := \log(K/S_0)$ として上式を書き換えたものを

$$c(k; S_0, T) := e^{-rT} S_0 \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[\left(e^{sT} - e^k \right)^+ \mid S_0 \right]$$

で表すことにする. この $c(k; S_0, T)$ は k について可積分ではない. このことは実際

$$c(k; S_0, T) = e^{-rT} S_0 \int_k^{\infty} (e^s - e^k) p_T(s) ds$$

であるから

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot c(k) = 0$$

となるが, 一方で

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -\infty} c(k) &= \lim_{k \rightarrow -\infty} e^{-rT} S_0 \int_k^{\infty} (e^s - e^k) p_T(s) ds = e^{-rT} S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{k \rightarrow -\infty} (e^s - e^k) p_T(s) ds \\ &= e^{-rT} S_0 \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} [e^{sT}] = \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} [e^{-rT} S_T] = S_0 \neq 0 \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} k \cdot c(k) = -\infty$$

となるからである. そこで, オプションの time value $z_T(k)$ を導入する:

$$\begin{aligned} z_T(k) &:= e^{-rT} S_0 \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[\left(e^{sT} - e^k \right)^+ \mid S_0 \right] - S_0 \left(1 - e^{k-rT} \right)^+ \\ &= e^{-rT} S_0 \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[\left(e^{sT} - e^k \right) 1_{\{sT \geq k\}} \mid S_0 \right] - S_0 \left(1 - e^{k-rT} \right) 1_{\{rT \geq k\}} \end{aligned}$$

この time value $z_T(k)$ は k について可積分となっているものとする. 実用上, この制約はほとんど問題にならないであろう. それゆえ, ほとんどの場合に $z_T(k)$ に対するフーリエ変換が定義できる:

$$\zeta_T(v) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} z_T(k) dk \quad (3)$$

さて, 割引価格過程 $\{e^{-rT} S_T\}$ はマルチンゲールであったから

$$1 = \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[e^{-rT+sT} \mid S_0 \right].$$

このことから,

$$\begin{aligned} \left(1 - e^{k-rT} \right) 1_{\{rT \geq k\}} &= \left\{ \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[e^{-rT+sT} \right] - e^{k-rT} \right\} 1_{\{rT \geq k\}} \\ &= \left(e^{-rT} \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[e^{sT} - e^k \right] \right) 1_{\{rT \geq k\}} \\ &= e^{-rT} \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[\left(e^{sT} - e^k \right) 1_{\{rT \geq k\}} \right] \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} z_T(k) &= e^{-rT} S_0 \mathbf{E}^{\mathcal{Q}} \left[\left(e^{sT} - e^k \right) \left(1_{\{k \leq sT\}} - 1_{\{rT \geq k\}} \right) \right] \\ &= e^{-rT} S_0 \int_{-\infty}^{\infty} (e^s - e^k) (1_{\{k \leq s\}} - 1_{\{rT \geq k\}}) q_T(s) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

(3), (4) より

$$\begin{aligned}\zeta_T(v) &= e^{-rT} S_0 \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} (e^s - e^k) (1_{\{k \leq s\}} - 1_{\{k \leq rT\}}) q_T(s) ds \\ &= e^{-rT} S_0 \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} q_T(s) (e^k - e^s) (1_{\{k \leq rT\}} - 1_{\{k \leq s\}}) ds\end{aligned}$$

積分の順序が交換可能なときには、さらに

$$\zeta_T(v) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) \left\{ \int_s^{rT} e^{ivk} (e^k - e^s) dk \right\} ds. \quad (5)$$

ここで積分の順序が交換可能となるための十分条件は

$$\exists \alpha > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) e^{(1+\alpha)s} ds < \infty \quad (6)$$

である。実際、Fubini の定理の系 (伊藤清三 (1963, p101)) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) \left\{ \int_s^{rT} |e^{ivk} (e^k - e^s)| dk \right\} ds < \infty \quad (7)$$

が示されれば、複素数値可測関数についての Fubini の定理が適用でき、積分順序の交換可能性が保障される。

さて、 $rT > s$ のとき

$$\int_s^{rT} |e^{ivk} (e^k - e^s)| dk = \int_s^{rT} |e^{ivk}| \cdot |e^k - e^s| dk = \int_s^{rT} |e^k - e^s| dk \leq \int_s^{rT} e^k dk = e^{rT} - e^s$$

となるから、ここでもし (6) が成り立てば

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) (e^{rT} - e^s) ds < \infty$$

となり、(7) が成り立つ。また、 $s > rT$ のときは

$$\int_{rT}^s |e^k - e^s| dk = \int_{rT}^s (e^s - e^k) dk \leq (e^s - e^k) (s - rT) 1_{\{s \geq rT\}} \leq e^s (s - rT) 1_{\{s \geq rT\}}$$

であるから、(6) が成り立つならば

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) e^s (s - rT) 1_{\{s \geq rT\}} ds < \infty$$

となり、(7) が成り立つ。そこで、以下 (6) が成り立つものと仮定して議論を進める。

まず、(5) における k についての積分部分を計算する：

$$\begin{aligned}\int_s^{rT} e^{ivk} (e^k - e^s) dk &= \int_s^{rT} (e^{(iv+1)k} - e^{ivk+s}) dk \\ &= \left[\frac{1}{iv+1} e^{(iv+1)k} - \frac{1}{iv} e^{ivk+s} \right]_s^{rT} = \left[\frac{ive^{(iv+1)k} - (iv+1)e^{ivk+s}}{(iv+1)iv} \right]_s^{rT} \\ &= \frac{ive^{(iv+1)rT} - (iv+1)e^{ivrT+s} - ive^{(iv+1)s} + (iv+1)e^{ivs+s}}{(iv+1)iv} \\ &= \frac{e^{(iv+1)s} + ive^{iv+1}rT - (iv+1)e^{ivrT+s}}{(iv+1)iv}\end{aligned}$$

そして、次に s について積分する:

$$\begin{aligned}\zeta_T(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-rT} e^{(iv+1)s} q_T(s) + iv e^{ivrT} q_T(s) - (iv+1) e^{ivrT-rT+s} q_T(s)}{(iv+1)iv} ds \\ &= \frac{e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(v-i)s} q_T(s) ds}{(iv+1)iv} + \frac{iv e^{ivrT}}{(iv+1)iv} \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) ds - \frac{(iv+1) e^{(iv-1)rT}}{(iv+1)iv} \int_{-\infty}^{\infty} e^s q_T(s) ds\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(v-i)s} q_T(s) ds &= \phi_T(v-i), \quad \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) ds = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^s q_T(s) ds &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-i)s} q_T(s) ds = \phi_T(-i) = e^{rT}\end{aligned}$$

であることに注意すれば

$$\zeta_T(v) = \frac{e^{-rT} \phi_T(v-i) - e^{ivrT}}{(iv+1)iv} \quad (8)$$

となる.

したがって、特性関数 $\phi_T(v)$ が与えられているときには、 $\zeta_T(v)$ の値を計算できる. $\zeta_T(v)$ に対して逆フーリエ変換すれば $z_T(k)$ を得る:

$$z_T(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikv} \zeta_T(v) dv$$

よって

$$C_T(K) = c_T(k) = z_T(k) + (S_0 - e^{-rT} K)^+.$$

ところで、いま (i.e. risk-neutral world において), $f(-i) = 0$, $f(v-i) := e^{-rT} \phi_T(v-i) - e^{ivrT}$ が成り立っていることから、 $\zeta_T(0)$ は不定形となっている. したがって

$$\begin{aligned}\lim_{v \rightarrow 0} \zeta_T(v) &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v-i)}{iv(1+iv)} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f'(v-i)}{i-2v} \quad (\because \text{ロピタルの定理より}) \\ &= \frac{f'(-i)}{i}\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\frac{d}{dv} f(v-i) = e^{-rT} (\phi_T(v-i))' - irT e^{ivrT}.$$

よって

$$f'(-i) = e^{-rT} (\phi_T(-i))' - irT$$

であるから

$$\lim_{v \rightarrow 0} \zeta_T(v) = \frac{e^{-rT} (\phi_T(-i))' - irT}{i}$$

となる. また

$$\phi_T(u) = \mathbb{E} [e^{iusT}] = \mathbb{E} [e^{iuZ_T}] = \phi_{Z_1}^T(u)$$

であるから、結局

$$\lim_{v \rightarrow 0} \zeta_T(v) = \frac{e^{-rT} (\phi_{Z_1}^T(-i))' - irT}{i}$$

とかける．それゆえ

$$\zeta(0) := \frac{e^{-rT} \left(\phi_{Z_1}^T(-i) \right)' - irT}{i}$$

とする．このように定義することによって，オプション価格を数値計算する際に，高速フーリエ変換法を用いることができる．

15) いま， $\zeta_T(v) := A(v) + iB(v)$ とすると

$$\overline{\zeta_T(v)} = A(v) - iB(v)$$

である．一方で

$$\begin{aligned} \overline{\zeta_T(v)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{ivk} z_T(k)} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \cdot \overline{z_T(k)} dk \end{aligned}$$

ここで，定義より $C_T(k) \in \mathbb{R}^+$ であるから， $z_T(k) \in \mathbb{R}^+$ である．すなわち， $z_t(k)$ は実数より

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-v)k} \cdot z_T(k) dk \\ &= \zeta_T(-v) \\ &= A(-v) + iB(-v) \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\begin{aligned} A(v) &= A(-v) \\ -B(v) &= B(-v) \end{aligned}$$

である．つまり， $\zeta_T(v)$ の実部 $A(v)$ は偶関数であり，虚部 $B(v)$ は奇関数である．

いま

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \zeta_T(v) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left(e^{-ivk} \zeta_T(v) \right) dv + i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left(e^{-ivk} \zeta_T(v) \right) dv \right\} \end{aligned}$$

とかけるが，ここで，実部 $A(v)$ は偶関数であり，虚部 $B(v)$ は奇関数であったことに注意すれば

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(e^{ivk} \zeta_T(v) \right) &= \cos(-vk)A(v) - \sin(-vk)B(v) \\ \operatorname{Im} \left(e^{ivk} \zeta_T(v) \right) &= \cos(-vk)B(v) + \sin(-vk)A(v) \end{aligned}$$

であることがわかるので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \zeta_T(v) dv &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(e^{-ivk} \zeta_T(v) \right) dv + i \cdot 0 \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} e^{-ivk} \zeta_T(v) dv \right) \end{aligned}$$

16)

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-ivk} \zeta_T(v) dv \\ &\equiv \int_0^a e^{-ivk} \zeta_T(v) dv \\ &\equiv \sum_{j=1}^N e^{-iv_j k} \zeta_T(v_j) \eta \end{aligned}$$

ただし,

$$\eta \cdot N = a, \quad v_j = \eta \cdot (j - 1)$$

とする. また, k を

$$k_u = -b + \lambda \cdot (u - 1), \quad u = 1, 2, \dots, N$$

$$b = \frac{N}{2} \lambda$$

のように離散化する. このとき先程の積分は

$$\sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{N} (j-1)(u-1)} \cdot x_j$$

とかける. ただし,

$$x_j := e^{ibv_j} \cdot \zeta_T(v_j), \quad \lambda\eta := \frac{2\pi}{N}$$

である.

3 日経 2 2 5 株価指数の収益率分布の非正規性がオプション 評価に与える影響について

3.1 序論

標準的なオプション価格評価モデルであるブラック・ショールズモデルでは，原資産過程は幾何ブラウン運動に従うと仮定される．すなわち，原資産の収益率分布は正規分布に従うことが仮定される．しかしながら，実際の株価収益率分布は正規分布よりも急尖的なあるいは左右非対称な分布に従うことが実証分析結果として多くの論文の中で報告されている．

また，多くの論文において指摘されているように，幾何レヴィ過程は原資産の収益率分布が急尖的なもしくは左右非対称な分布をするという特徴を説明できるモデルである．近年これらの分布の特徴を説明できるモデルとして Madan and Seneta (1990)，Madan *et al.* (1998) による幾何 VG 過程や Barndorff-Nielsen (1995) による幾何 NIG 過程などが注目されるようになってきている．そこで，本章では幾何レヴィ過程として幾何 VG 過程と幾何 NIG 過程に注目した．また，Merton (1976) モデルもよく用いられるので分析対象とした．

本章の目的は，収益率分布の急尖的な特徴もしくは左右非対称性をより正確に捉えられるモデルを用いた場合のオプション評価のパフォーマンスを調べることである．言い換えれば，オプション価格には原資産の収益率分布の非正規性が反映されるかどうかについて考察することにある．ただし，一般的に原資産過程を幾何ブラウン運動から幾何レヴィ過程に拡張した場合にはその市場モデルは非完備市場となる．それゆえ，幾何レヴィ過程モデルにおいては同値マルチンゲール測度は一意的には定まらない．同値マルチンゲール測度の候補としていくつかの測度が提案されており，用いる測度によって幾何レヴィ過程モデルはいくつかのクラスに分類される．本章では，幾何レヴィ過程モデルとして特に Miyahara (2001) で導入された [GLP & MEMM] モデルに基づいて分析を行うこととした．

本章は次のような内容になっている．まず，3.2 節では日経 2 2 5 株価指数の収益率分布の正規性を調べ，先に述べた代表的な幾何レヴィ過程の分布の当てはまり度合いについてみた．対象とする期間は，1991 年 1 月 7 日から 2004 年 12 月 30 日とし，サンプル区間を 500 営業日とした．そして 1991 年 1 月 7 日から始めて 1 日置きにサンプル数を 500 個確保で

きる間、正規性の検定を行った。結果として正規分布に従うという帰無仮説が棄却される区間と棄却できない区間とが存在していたが、特に、1994年1月4日から1996年12月30日は正規分布には従わない日が多く見られた。また、2002年1月4日から2004年12月30日は多くの日で正規分布に従うという帰無仮説を棄却できなかった。分析対象とした分布と正規分布とをAICの観点から比較したところ、正規性が棄却された期間においてはVG分布やNIG分布などのほうが正規分布よりも当てはまりがよかった。また、正規性が棄却されなかった期間においても分析対象とした分布のほうが正規分布より当てはまりがよい期間が多く見られた。ただし、Mertonのジャンプ拡散過程モデルはパラメータ数が多いために、正規性が棄却されなかった期間においては、必ずしも正規分布と有意な差が見られないケースも多かった。以上の分析から、分析対象とした期間の日経225株価指数の収益率分布に対しても、多くの論文において指摘されているように、正規分布にかえて分析対象とした幾何レヴィ過程モデルを用いることによって分布の特徴をより正確に捉えられることが確認できた。

そこで3.3節では、株価の収益率分布の非正規性がオプション価格にどのような影響を与えているのか分析を行った。本章では特に、相対的に正規性の弱かった期間と相対的に正規性の強かった期間の2つの期間を分析の対象とした。これによって収益率分布がオプション価格に与える影響をより明確に分析することが可能となろう。そしてこの分析からは次のような結果が得られた。まず正規性が相対的に強かった期間においては、収益率分布は正規分布に非常に近かったこともあり、オプション評価誤差はブラック・ショールズモデルとほとんど同じであるという結果であった。一方、正規性が相対的に弱った期間においてはブラック・ショールズモデルよりも誤差に改善がみられた。それゆえ、数値計算の手間を考えないとなれば、ブラック・ショールズモデルから[GLP & MEMM]モデルに拡張することによってオプション価格評価のパフォーマンスが改善する可能性があることをみた。すなわち、収益率分布の非正規性がオプション価格に影響を与えている可能性があることがわかったといえる。

しかしながら、[GLP & MEMM]モデルに拡張した場合の価格評価の改善度は小さいものであり、なお多くの誤差が残っていた。そして、その誤差について詳しく考察するとボラティリティ・スキューという特徴がみられた。

3.2 日経 2 2 5 株価指数の収益率分布に対する分析

よく知られているように、さまざまな株価の収益率分布は正規分布よりも急尖的な、あるいは、歪んだ分布に従っていることが統計的に確認されている。本章においても、実際に分析を行なうに先立って、日経 2 2 5 株価指数の収益率分布の正規性について検定を行った。対象とする期間は、1991 年 1 月 7 日から 2004 年 12 月 30 日とし、サンプル区間を 500 営業日とした。そして 1991 年 1 月 7 日から始めて 1 日置きにサンプル数を 500 個確保できる間、正規性の検定を行った。ここで、正規性の検定として特に Kolmogorov-Smirnov test, Lilliefors test そして Jarque-Bera test を行なった。表 1 は、その結果を記したものである（ただし、紙面の都合上、1 ヶ月置きの結果のみを載せている）。Kolmogorov-Smirnov test ではほとんどの期間で正規性は棄却されなかった。しかし、一般に Kolmogorov-Smirnov test よりも正規性の検定力が高いとされる Jarque-Bera test ではほとんどの期間で正規性が棄却されていた。また、Lilliefors test においても多くの期間で正規性は棄却されていた。この結果から分析した期間においては、一般的には日経 225 の収益率分布の正規性は否定されるといえる。また、歪度と尖度も計算したが、表 1 によれば、日経 225 の収益率の分布は分析した期間においてはほとんどの場合で正規分布よりも急尖的な特徴を持ち、また歪みを持っていることが分かる。

我々が分析の対象とするモデルは、幾何 VG モデル、幾何 NIG モデルそして Merton モデルである。これらのモデルが仮定する収益率分布が、実際の収益率の分布の特徴をよく捉えられるということは周知の通りである。ここで、分析対象とした各区間で、分布のパラメータを最尤法によりそれぞれ推定した（詳細は、3.3 節を参照の事）。そして、そのときの AIC（赤池情報量基準）を計算した。その結果をまとめたものが表 2, 3 である（ただし、紙面の都合上 1 ヶ月置きの結果のみ載せている）。相対的に正規性の弱かった期間（1994 年 1 月 4 日から 1996 年 12 月 30 日）を分析期間とした場合には、VG 分布や NIG 分布、Merton モデルの分布の方が当てはまりがよかったのは言うまでもないが、表 3 から分かるように、相対的に正規分布に近かった期間（2002 年 1 月 4 日から 2004 年 12 月 30 日）においても Jarque-Bera test で正規性が棄却された期間においては概ね正規分布よりも他の分布の方が当てはまりがよいという結果であった。ただし、Merton モデルの場合はそのパラメータ数が他のモデルより多いため正規性が棄却された場合でも有意な差が見られない期間も多かった。

表1 Normality Test for the distribution of log returns on Nikkei 225 index. To test the normality, we performs a Kolmogorov-Smirnov test, Lilliefors test, and Jarque-Bera test (1 : reject the normality, 0 : cannot reject).

sample period	KS test	Lilliefors test	JB test	skewness	kurtosis
1992/12/21 ~ 1994/12/30	1	1	1	0.4819	7.4483
1993/01/21 ~ 1995/01/31	1	1	1	0.3107	7.8267
1993/02/19 ~ 1995/02/28	1	1	1	0.2536	7.7351
1993/03/23 ~ 1995/03/31	1	1	1	0.1765	7.1107
1993/04/20 ~ 1995/04/28	1	1	1	0.0138	7.2462
1993/05/24 ~ 1995/05/31	1	1	1	-0.0053	7.2043
1993/06/24 ~ 1995/06/30	1	1	1	0.0019	6.9975
1993/07/23 ~ 1995/07/31	1	1	1	0.1815	7.1279
1993/08/25 ~ 1995/08/31	1	1	1	0.2096	6.8516
1993/09/24 ~ 1995/09/29	1	1	1	0.2314	6.5675
1993/10/26 ~ 1995/10/31	0	1	1	0.2321	6.3609
1993/11/25 ~ 1995/11/30	1	1	1	0.2462	6.6172
1993/12/27 ~ 1995/12/29	1	1	1	0.3361	7.3037
1994/01/25 ~ 1996/01/31	1	1	1	0.5115	7.5868
1994/02/23 ~ 1996/02/29	0	1	1	0.1352	6.0519
1994/03/24 ~ 1996/03/29	0	1	1	0.1128	6.1506
1994/04/22 ~ 1996/04/30	0	1	1	0.1022	6.3781
1994/05/27 ~ 1996/05/31	0	1	1	0.1568	6.2726
1994/06/24 ~ 1996/06/28	0	1	1	0.1532	6.4655
1994/07/27 ~ 1996/07/31	0	1	1	0.1480	6.3782
1994/08/26 ~ 1996/08/30	0	1	1	0.1449	6.2526
1994/09/26 ~ 1996/09/30	0	1	1	0.1291	6.1462
1994/10/27 ~ 1996/10/31	0	1	1	0.1510	6.0602
1994/11/28 ~ 1996/11/29	0	1	1	0.1281	5.9448
1994/12/27 ~ 1996/12/30	0	1	1	0.0992	5.6523
1995/01/26 ~ 1997/01/31	0	1	1	0.2492	4.9105
1995/02/22 ~ 1997/02/28	0	1	1	0.2060	4.8106
1995/03/23 ~ 1997/03/31	0	1	1	0.2375	4.9342
1995/04/21 ~ 1997/04/30	0	1	1	0.3301	4.8450
1995/05/25 ~ 1997/05/30	0	1	1	0.3369	4.8124
1995/06/23 ~ 1997/06/30	0	1	1	0.3699	4.9959
1995/07/25 ~ 1997/07/31	0	1	1	0.1629	4.3021
1995/08/23 ~ 1997/08/29	0	1	1	0.0183	4.3138
1995/09/21 ~ 1997/09/30	0	0	1	-0.0042	4.2437
1995/10/24 ~ 1997/10/31	0	1	1	-0.0844	4.3025
1995/11/20 ~ 1997/11/28	0	1	1	0.0345	6.4432
1995/12/20 ~ 1997/12/30	0	1	1	-0.0206	5.9512

sample period	KS test	Lilliefors test	JB test	skewness	kurtosis
1996/01/22 ~ 1998/01/30	0	1	1	0.0796	5.9488
1996/02/19 ~ 1998/02/27	0	1	1	0.0720	5.8266
1996/03/21 ~ 1998/03/31	0	1	1	0.0871	5.6047
1996/04/19 ~ 1998/04/30	0	1	1	0.0976	5.3588
1996/05/21 ~ 1998/05/29	0	1	1	0.0735	5.3757
1996/06/20 ~ 1998/06/30	0	1	1	0.1226	5.1885
1996/07/22 ~ 1998/07/31	0	1	1	0.1036	5.0076
1996/08/20 ~ 1998/08/31	0	1	1	0.1194	4.9098
1996/09/18 ~ 1998/09/30	0	1	1	0.1039	4.7819
1996/10/22 ~ 1998/10/30	0	1	1	0.1553	4.7683
1996/11/19 ~ 1998/11/30	0	1	1	0.1554	4.5662
1996/12/18 ~ 1998/12/30	0	1	1	0.1662	4.5536
1997/01/22 ~ 1999/01/29	0	1	1	0.1474	4.6769
1997/02/19 ~ 1999/02/26	0	1	1	0.1408	4.9087
1997/03/24 ~ 1999/03/31	0	1	1	0.1676	4.6852
1997/04/22 ~ 1999/04/30	0	1	1	0.1671	4.7477
1997/05/20 ~ 1999/05/31	0	1	1	0.1953	4.7470
1997/06/19 ~ 1999/06/30	0	1	1	0.1778	4.7369
1997/07/18 ~ 1999/07/30	0	1	1	0.1669	4.6868
1997/08/20 ~ 1999/08/31	0	1	1	0.1766	4.6738
1997/09/18 ~ 1999/09/30	0	1	1	0.1458	4.6251
1997/10/20 ~ 1999/10/29	0	1	1	0.1465	4.6445
1997/11/18 ~ 1999/11/30	0	1	1	0.0223	4.3702
1997/12/18 ~ 1999/12/30	0	1	1	0.1169	4.5677
1998/01/21 ~ 2000/01/31	0	1	1	0.1316	4.3746
1998/02/19 ~ 2000/02/29	0	1	1	0.1348	4.4606
1998/03/23 ~ 2000/03/31	0	1	1	0.1189	4.5870
1998/04/20 ~ 2000/04/28	0	1	1	-0.0848	5.4380
1998/05/21 ~ 2000/05/31	0	1	1	-0.1038	5.2755
1998/06/22 ~ 2000/06/30	0	1	1	-0.1517	5.2679
1998/07/21 ~ 2000/07/31	0	1	1	-0.1319	5.2853
1998/08/21 ~ 2000/08/31	0	1	1	-0.1571	5.2567
1998/09/21 ~ 2000/09/29	0	1	1	-0.1508	5.2706
1998/10/21 ~ 2000/10/31	0	0	1	-0.2315	4.8044
1998/11/19 ~ 2000/11/30	0	1	1	-0.2478	4.9154
1998/12/21 ~ 2000/12/29	0	1	1	-0.2483	4.8749
1999/01/21 ~ 2001/01/31	0	0	1	-0.2454	4.9463
1999/02/18 ~ 2001/02/28	0	0	1	-0.2185	4.8552
1999/03/19 ~ 2001/03/30	0	1	1	-0.0288	5.7451
1999/04/19 ~ 2001/04/27	0	1	1	-0.0196	5.8310
1999/05/24 ~ 2001/05/31	0	1	1	-0.0139	5.7626

sample period	KS test	Lilliefors test	JB test	skewness	kurtosis
1999/06/22 ~ 2001/06/29	0	1	1	0.0006	5.7164
1999/07/22 ~ 2001/07/31	0	1	1	0.0396	5.4964
1999/08/24 ~ 2001/08/31	0	1	1	0.0979	5.3095
1999/09/21 ~ 2001/09/28	0	1	1	-0.0697	5.4590
1999/10/25 ~ 2001/10/31	0	1	1	-0.0314	5.3087
1999/11/25 ~ 2001/11/30	0	1	1	-0.0087	5.1425
1999/12/22 ~ 2001/12/28	0	1	1	-0.0192	4.8736
2000/01/24 ~ 2002/01/31	0	1	1	-0.0098	4.8987
2000/02/21 ~ 2002/02/28	0	1	1	0.0466	4.7639
2000/03/21 ~ 2002/03/29	0	1	1	0.1144	4.6622
2000/04/19 ~ 2002/04/30	0	1	1	0.2460	4.3222
2000/05/23 ~ 2002/05/31	0	1	1	0.2720	4.4231
2000/06/20 ~ 2002/06/28	0	1	1	0.2529	4.3022
2000/07/24 ~ 2002/07/31	0	1	1	0.2492	4.1463
2000/08/23 ~ 2002/08/30	0	1	1	0.2591	4.1423
2000/09/20 ~ 2002/09/30	0	1	1	0.2586	3.9918
2000/10/23 ~ 2002/10/31	0	1	1	0.2551	3.9782
2000/11/21 ~ 2002/11/29	0	0	1	0.2270	3.8811
2000/12/20 ~ 2002/12/30	0	1	1	0.2385	3.9368
2001/01/22 ~ 2003/01/31	0	1	1	0.2475	3.9748
2001/02/19 ~ 2003/02/28	0	1	1	0.2294	3.9567
2001/03/19 ~ 2003/03/31	0	0	1	0.2244	3.9184
2001/04/18 ~ 2003/04/30	0	0	0	0.1137	3.4501
2001/05/22 ~ 2003/05/30	0	0	0	0.0728	3.4744
2001/06/20 ~ 2003/06/30	0	0	0	0.0271	3.4535
2001/07/23 ~ 2003/07/31	0	0	0	-0.0059	3.4576
2001/08/21 ~ 2003/08/29	0	0	1	-0.0653	3.5632
2001/09/18 ~ 2003/09/30	0	0	0	0.0666	3.0674
2001/10/22 ~ 2003/10/31	0	0	0	-0.0177	3.2761
2001/11/15 ~ 2003/11/28	0	0	0	-0.0454	3.2361
2001/12/17 ~ 2003/12/30	0	0	0	-0.0651	3.2493
2002/01/21 ~ 2004/01/30	0	0	0	-0.0864	3.3078
2002/02/18 ~ 2004/02/27	0	0	0	-0.0933	3.3504
2002/03/22 ~ 2004/03/31	0	0	1	-0.2668	3.1171
2002/04/22 ~ 2004/04/30	0	0	1	-0.2755	3.1552
2002/05/21 ~ 2004/05/31	0	1	1	-0.3258	3.2056
2002/06/20 ~ 2004/06/30	0	0	1	-0.3402	3.2475
2002/07/19 ~ 2004/07/30	0	0	1	-0.3159	3.2838
2002/08/20 ~ 2004/08/31	0	0	1	-0.3633	3.4036
2002/09/18 ~ 2004/09/30	0	0	1	-0.3722	3.5163
2002/10/18 ~ 2004/10/29	0	0	1	-0.3884	3.6164
2002/11/18 ~ 2004/11/30	0	1	1	-0.3977	3.7071

以上から，本章においても，日経 225 株価指数の収益率分布の非正規性を確認することができた．そして，正規分布よりも VG 分布や NIG 分布の方が現実の分布に対して有意に近い分布であるというよく知られた結論も，実証分析を行なうに先立って，我々が分析対象とした日経 225 株価指数の収益率分布に対しても確認することができた．そして，この結果は，日経 225 の価格過程として幾何ブラウン運動から幾何レヴィ過程へ拡張することに対する実証的な根拠となる．

3.3 日経 225 株価指数オプションに対する分析

3.2 節において明らかとなったように，我々が分析対象とする日経 225 株価指数オプションが取引された期間においては，日経 225 株価指数の価格過程は幾何ブラウン運動でモデル化するよりも幾何レヴィ過程によってモデル化したほうが収益率分布はより現実になくなる．そこで，原資産過程を幾何ブラウン運動から幾何レヴィ過程に拡張することによってオプション価格評価にどのような影響があるのか分析を行った．本節では，日経 225 株価指数オプションに対する分析を行う．

3.3.1 データについて

本章では，分析の対象として大阪証券取引所（OSE）で取引された日経 225 株価指数コール・オプションを採用した．日経 225 株価指数オプションは 1989 年から OSE で取引が開始され，当初の数期間はアメリカ型のオプションとして取引されていたが，現在ではヨーロッパ型のオプションが取引されている（see <http://www.ose.or.jp/futures/report/0007.pdf>）．

実際に取引されたオプション価格の中には，オプションの理論的な上限・下限値から外れた価格が存在している．本来であれば，そのようなオプションに対しては裁定取引が行なわれるはずであるのだが，取引コストの影響などによって理論的な範囲から外れた価格が付くことがあることが知られている．本章では，ヨーロッパ型オプションの理論的な上限・下限値：

$$\text{コール・オプション価格 } c : \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \leq c \leq S_0$$

から外れたオプションは分析の対象から除外した．また，オプションの取引時間は午後 3 時 15 分までである一方で，原証券である日経 225 の終値は午後 3 時時点のものである．したがって，取引終了時点のオプション価格を評価する際の実証価格には必ずしも明らかではな

表2 分布のあてはまり：期間 A

サンプル区間	J-B	AIC			
		BS	Merton	VG	NIG
1992/01/06 ~ 1994/01/12	1	-2704.22	-2731.51 *	-2732.88 *	-2730.93 *
1992/02/03 ~ 1994/02/08	1	-2690.15	-2727.51 *	-2729.38 *	-2729.7 *
1992/03/02 ~ 1994/03/08	1	-2687.08	-2724.03 *	-2725.84 *	-2725.9 *
1992/04/01 ~ 1994/04/07	1	-2690.8	-2729.55 *	-2731.06 *	-2731.26 *
1992/05/01 ~ 1994/05/12	1	-2748.05	-2783.08 *	-2784.67 *	-2785.77 *
1992/06/01 ~ 1994/06/08	1	-2773.79	-2816.78 *	-2817.26 *	-2819.42 *
1992/07/01 ~ 1994/07/08	1	-2793.07	-2840.86 *	-2840.27 *	-2843.31 *
1992/08/03 ~ 1994/08/10	1	-2834.42	-2893.26 *	-2889.33 *	-2894.1 *
1992/09/01 ~ 1994/09/08	1	-2909.48	-2958 *	-2955.71 *	-2959.56 *
1992/10/01 ~ 1994/10/11	1	-2954.91	-3005.24 *	-3003.59 *	-3007.72 *
1992/11/02 ~ 1994/11/11	1	-2968.36	-3025.84 *	-3026.05 *	-3030.17 *
1992/12/01 ~ 1994/12/09	1	-2988.76	-3042.77 *	-3045.45 *	-3047.84 *
1993/01/04 ~ 1995/01/12	1	-3000.24	-3060.49 *	-3062.9 *	-3066.28 *
1993/02/01 ~ 1995/02/09	1	-2976.95	-3048.6 *	-3048.47 *	-3053.08 *
1993/03/01 ~ 1995/03/08	1	-2955.14	-3021.61 *	-3024.55 *	-3026.53 *
1993/04/01 ~ 1995/04/11	1	-2935.48	-2994.71 *	-2998.06 *	-2999.43 *
1993/05/06 ~ 1995/05/15	1	-2956.1	-3015.11 *	-3017.74 *	-3020.22 *
1993/06/01 ~ 1995/06/08	1	-2947.13	-3001.69 *	-3002.89 *	-3006.84 *
1993/07/01 ~ 1995/07/07	1	-2914.54	-2966.06 *	-2977.33 *	-2981.23 *
1993/08/02 ~ 1995/08/08	1	-2907.32	-2961.86 *	-2966.43 *	-2968.23 *
1993/09/01 ~ 1995/09/07	1	-2888.54	-2940.37 *	-2945.24 *	-2946.16 *
1993/10/01 ~ 1995/10/06	1	-2870.39	-2917.01 *	-2919.28 *	-2921.55 *
1993/11/01 ~ 1995/11/07	1	-2862.45	-2906.67 *	-2911.37 *	-2911.52 *
1993/12/01 ~ 1995/12/06	1	-2894.18	-2945.85 *	-2949.55 *	-2948.81 *
1994/01/04 ~ 1996/01/09	1	-2928.59	-2984.07 *	-2988.5 *	-2986.93 *
1994/02/01 ~ 1996/02/07	1	-3001.53	-3036.86 *	-3043.1 *	-3040.44 *
1994/03/01 ~ 1996/03/06	1	-3017.01	-3056.8 *	-3062.99 *	-3059.5 *
1994/04/01 ~ 1996/04/08	1	-3024.08	-3065.6 *	-3068.49 *	-3066.81 *
1994/05/02 ~ 1996/05/09	1	-3030.62	-3074.63 *	-3077.86 *	-3075.58 *
1994/06/01 ~ 1996/06/05	1	-3020.64	-3064.94 *	-3068.4 *	-3065.77 *
1994/07/01 ~ 1996/07/05	1	-3038.93	-3092.47 *	-3098.52 *	-3094.73 *
1994/08/01 ~ 1996/08/05	1	-3025.81	-3073.92 *	-3079.34 *	-3076.43 *
1994/09/01 ~ 1996/09/05	1	-3019.66	-3063.73 *	-3066.97 *	-3065.07 *
1994/10/03 ~ 1996/10/07	1	-3016.27	-3059.2 *	-3061.95 *	-3060.06 *
1994/11/01 ~ 1996/11/06	1	-3008.27	-3047.38 *	-3049.86 *	-3047.77 *
1994/12/01 ~ 1996/12/04	1	-3003.93	-3041.24 *	-3043.78 *	-3041.94 *

・ J-B : Jarque-Bera Test (1 : 正規性を棄却, 0 : 棄却されない)

・ 正規分布と比較して有意な差が見られた場合には数値の右側に * を付加した

表3 分布のあてはまり：期間 B

サンプル区間	J-B	AIC			
		BS	Merton	VG	NIG
2000/01/04 - 2002/01/11	1	-2682.43	-2697.83 *	-2698.46 *	-2700.31 *
2000/02/01 - 2002/02/08	1	-2685.99	-2700.35 *	-2700.39 *	-2702.24 *
2000/03/01 - 2002/03/11	1	-2655.42	-2671.86 *	-2676.12 *	-2674.21 *
2000/04/03 - 2002/04/11	1	-2647.66	-2660.83 *	-2663.35 *	-2662.42 *
2000/05/01 - 2002/05/14	1	-2666.31	-2673.45 *	-2679.26 *	-2675.33 *
2000/06/01 - 2002/06/11	1	-2683.2	-2692.77 *	-2699.61 *	-2695.27 *
2000/07/03 - 2002/07/11	1	-2663.48	-2668.62 *	-2670.53 *	-2671.32 *
2000/08/01 - 2002/08/08	1	-2647.76	-2653.74 *	-2653.79 *	-2654.17 *
2000/09/01 - 2002/09/10	1	-2644.6	-2649.08 *	-2648.85 *	-2649.31 *
2000/10/02 - 2002/10/10	1	-2632.22	-2632.44	-2633.81 *	-2634.19 *
2000/11/01 - 2002/11/12	1	-2625.7	-2626.01	-2627.75 *	-2628.01 *
2000/12/01 - 2002/12/10	1	-2624.73	-2625.06	-2630.26 *	-2626.68 *
2001/01/04 - 2003/01/16	1	-2635.08	-2636.78 *	-2638.01 *	-2638.32 *
2001/02/01 - 2003/02/13	1	-2631.36	-2632.4 *	-2633.4 *	-2633.72 *
2001/03/01 - 2003/03/12	1	-2629.44	-2630.16	-2631.27 *	-2631.55 *
2001/04/02 - 2003/04/11	0	-2667.85	-2663.04	-2664.77	-2664.41
2001/05/01 - 2003/05/13	0	-2681.63	-2676.85	-2677.4	-2677.33
2001/06/01 - 2003/06/11	0	-2689.44	-2686	-2686.26	-2686.49
2001/07/02 - 2003/07/10	0	-2684.42	-2679.98	-2681.87	-2681.92
2001/08/01 - 2003/08/11	0	-2691.69	-2689.33	-2689.82	-2689.98
2001/09/03 - 2003/09/11	1	-2703.86	-2702.5	-2703	-2703.12
2001/10/01 - 2003/10/10	0	-2742.25	-2736.39	-2738.56	-2738.35
2001/11/01 - 2003/11/13	0	-2744.32	-2739.46	-2741.62	-2741.37
2001/12/03 - 2003/12/15	0	-2739.45	-2734.32	-2736.64	-2736.12
2002/01/04 - 2004/01/16	0	-2753.13	-2748.44	-2750.96	-2750.09
2002/02/01 - 2004/02/13	0	-2763.39	-2759.31	-2762.01	-2761.88
2002/03/01 - 2004/03/11	0	-2779.93	-2775.76	-2779.64	-2779.48
2002/04/01 - 2004/04/08	1	-2810.49	-2804.98	-2808.93	-2812.27 *
2002/05/01 - 2004/05/13	1	-2794.11	-2789.48	-2791.09	-2791.13
2002/06/03 - 2004/06/11	1	-2783.7	-2778.65	-2787.95 *	-2786.7 *
2002/07/01 - 2004/07/09	1	-2809.08	-2804.34	-2812.8 *	-2812.35 *
2002/08/01 - 2004/08/12	1	-2832.52	-2828.33	-2835.97 *	-2835.83 *
2002/09/02 - 2004/09/13	1	-2846.98	-2843.76	-2852.98 *	-2848.81 *
2002/10/01 - 2004/10/13	1	-2870.57	-2868.92	-2877.84 *	-2878.35 *
2002/11/01 - 2004/11/15	1	-2892.3	-2891.41	-2898.97 *	-2893.57 *
2002/12/02 - 2004/12/14	1	-2915.73	-2916.43	-2923.75 *	-2924.29 *

・J-B：Jarque-Bera Test (1：正規性を棄却，0：棄却されない)

・正規分布と比較して有意な差が見られた場合には数値の右側に * を付加した

い。日々の日経 225 の変動からするとこの 15 分というタイムラグは小さなものであるとはいえないであろう。このタイムラグを考慮するために、よく先物価格が用いられている。これは、先物価格の取引終了時点がオプションのそれと同じであることによる。本章では、日経 225 の終値を先物価格の公式：

$$F_t(T_F) = S_t e^{r(T_F - t)}, \quad F_t(T_F) : \text{futures price expiring in } T_F \text{ at time } t.$$

から、日経 225 先物の終値を代入することで逆に推計した。ここで、日経 225 先物の終値としては、その取引日において最も取引高の大きかったものを使用した。ただし、薄商いのオプションに対してありえることであるが、オプションの終値が日経 225 の終値以前の時点で評価されたものである場合の影響については考慮していない。こうして得られた日経 225 の終値を S^* で表すこととする。図 1 は、 S^* のサンプル・パスを描いたものである。そして、日経 225 の終値 S との差： $(S - S^*)$ を描いたのが図 2 である。2000 年 4 月 21 日に価

格差が-515.62 と他より大きな値をとっていたが、これは、翌営業日から日経 225 の構成銘柄が大きく変更されたことが影響したと考えられる。



図 1 S^* のサンプル・パス

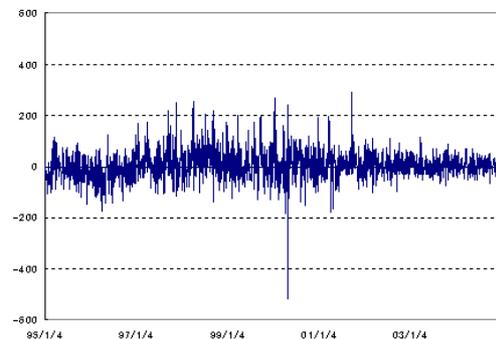


図 2 価格差

さて、本章では、特に断らない限り、 $[t-1, t]$ での日経 225 株価指数の収益率といえば log return ($\log S_t - \log S_{t-1}$) のことを指すものとする。ここで、日経 225 の構成銘柄は 2000 年 4 月に大きく (225 銘柄中 30 銘柄) 変更されているがこの入れ替えによる影響については考慮に入れていない。また、日経 225 の収益率の曜日効果については考慮に入れていない。

オプションの残存期間について満期日までの日数を暦日か営業日のどちらに基づいて計算すべきか議論のあるところである。一般には、営業日ベースの残存期間を用いた方が良いとされている (see ハル (2003, pp. 393-396))。ここで、我々が対象としているデータで、暦日ベースの残存期間を用いた場合と営業日ベースの残存期間を用いた場合とでオプション価格評価にどのような影響が現れるか調べてみた。その結果をまとめたものが表 4 である。表 4 から分かるように、営業日ベースの残存期間を用いた方が暦日ベースの残存期間を用いた場合より当てはまりが良い。この結果より、本章では残存期間としては営業日ベースの残存期間を採用した。

本章では、安全証券収益率として週次の新発 CD レートを採用した。例えば、暦日ベースの残存期間が 50 日のオプションに対しては、その週の新発 CD レートで満期日が 30 日から 60 日の場合の値を用いた。また、実際にはその値を連続複利に変換した後、営業日ベースの年率に直したものを用いた。まれにオプションの残存期間に対応する CD レートが存在しない場合があったが、その場合は便宜的に利用可能な直前の値を用いた。

表 4 残存期間の計算方法の違いについて，ブラック・ショールズモデルの場合で比較した．1995 年から 2004 年を分析対象として，その各四半期を分析期間とした．そして，その各期間の期首から直近 1000 営業日をサンプル区間としてパラメータを最尤推定し，そのパラメータを使って各分析期間のオプション価格を評価した．

Pricing Errors	trading day base	calendar day base
ARPE	0.350710	0.764910
RMSE	129.0437	158.2915
MER	0.052979	0.640820

3.3.2 実証分析

本節では，収益率分布の非正規性という観点から幾何レヴィ過程モデルを用いた場合の，モデルの当てはまり度合いについて検証する．

ここで，当てはまり度合いの尺度として average relative percentage error (ARPE) :

$$\text{ARPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|p_i - \eta_i|}{p_i}, \quad n : \text{オプションの数}$$

を用いる．ここに， p は実際に観察されたオプションの市場価格であり， η はオプションの理論価格である．また，誤差の尺度として ARPE の他に root-mean-square error (RMSE) も計算した．

$$\text{RMSE} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{|p_i - \eta_i|^2}{n}}$$

さらに，誤差のバイアスの有無を見るために平均誤差率 (MER : mean error rate) も計算した．

$$\text{MER} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{p_i - \eta_i}{p_i}$$

まず，分析期間として 1994 年 1 月 4 日から 1996 年 12 月 30 日の過去 3 年間と 2002 年 1 月 4 日から 2004 年 12 月 30 日の過去 3 年間を選択した．ここで 1994 年 1 月 4 日から 1996 年 12 月 30 日を期間 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{743}\}$ で表すこととする． A_1 は 1994 年 1 月 4 日を表すものとし， A_2 はその翌日を表すことにする．以下，同様に $A_i, i = 1, 2, \dots, 743$ を定義する．また，2002 年 1 月 4 日から 2004 年 12 月 30 日を期間 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_{737}\}$ で表すことにする．

この期間をそれぞれ選択した理由は表 1 より明らかであろう。すなわち、各 A_j の直近 500 営業日の間をサンプル期間として原証券の収益率分布を推定した場合には、他の期間より急尖的特徴を比較的強く持っている一方で、期間 B は全体的にとても正規分布に近い期間であったからである。すなわち、期間 A に取引されたオプションは、その原証券の収益率分布が相対的に急尖的な特徴を持っている期間に取引されたことになる。そして期間 B に実際に取引されたオプションは、原証券の収益率分布がかなり正規分布に近かった期間において評価されたものである。これら 2 つの期間におけるオプション評価の違いについて分析することで株価収益率の非正規性を捉えられるモデルを用いた場合の特徴が見えてくるであろう。

さて、本稿では、オプション C の理論価格 η は、確率測度 \mathbf{P} が与えられた下で、 $\eta = E_{\mathbf{Q}}[e^{-rT}C]$ 、 \mathbf{Q} : 同値マルチンゲール測度として計算されるものとしていた。したがって、 $\eta_i, i = 1, \dots, n$ の値を得るには、確率測度 \mathbf{P} を推定しなくてはならない。本節では、オプション C の価格 η を次のようにして計算した。

A_1 の間に取引されたオプション $C^{k,A_1}, k = 1, \dots, 20$ を評価するために、 A_1 の直近 500 営業日分 (1991 年 12 月 19 日から 1993 年 12 月 30 日) をサンプル区間とした。ここで、500 営業日未満のデータ数で推定した場合には推定されたパラメータは不安定になる場合が多かったことから、500 営業日というのが安定的なパラメータ値を得るための一つの目安となるように思われる。そして、そのサンプル期間に観察された log return を使って最尤法により確率測度 \mathbf{P} を推定した。実際には、最尤推定量を解析的に求めることは必ずしも容易ではないため、数値解析的に計算した：

$$\text{SEARCH } \theta : \sum_i \log f(\theta; x_i) \rightarrow \min.$$

ただし、実際の目的関数にはパラメータの制約条件を満たすようにペナルティ項を付与した。また、密度関数 $f(x; \theta)$ 、 θ : モデル・パラメータは、解析的な形では与えられてはいないが特性関数の関数形は分かっているので、ここでは特性関数を逆フーリエ変換することで密度関数の値を数値解析的に求めている。ただし、NIG 分布に関してはその密度関数の形が陽に分かっているので、NIG 分布に関してはその関数から対数尤度を計算した。ここで、このようにして得られた確率を $\hat{\mathbf{P}}_{A_1}$ で表すこととする。この $\hat{\mathbf{P}}_{A_1}$ に基づいて計算されたオプション価格 $\hat{\eta}_k = E_{\hat{\mathbf{Q}}_{A_1}}[e^{-rT}C^{k,A_1}]$ をオプション C^{k,A_1} の理論価格とする。以下、同様にして各期間 $A_j, j = 2, \dots, 40$ に対してオプションの理論価格を計算した。ここで、オプ

ション価格は Carr and Madan Carr and Madan (1998) による FFT 法を使用する計算方法を用いて求めた。

これにより

$$\widehat{\text{ARPE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|p_i - \hat{\eta}_i|}{p_i}$$

が計算される。他の誤差の尺度に対しても同様である。この結果をまとめたものが表 10 である。同様にして期間 B に対しても分析を行なった。その結果をまとめたものが表 11 である。

この結果から分かるように、比較的に正規分布よりも急尖的特徴を示していた期間に対しては、幾何レヴィ過程モデルのほうが予測誤差が小さくなっていた。収益率分布が急尖的特徴を持った期間に対して、ブラック・ショールズモデルから幾何レヴィ過程モデルに拡張することでオプション評価のパフォーマンスが改善された点は大変興味深い。

そして、比較的に正規分布に近かった期間に対しては、ブラック・ショールズモデルと幾何レヴィ過程モデルとにはほとんど差は見られなかった。Jarque-Bera の検定結果からは、期間 B においても多くの日（全体の約 2/3 の期間）で正規性は棄却されてはいたが、尖度をみるとかなり正規分布に近かったことが分かる。幾何レヴィ過程モデルにおける収益率分布は、残存期間の増大と共に正規分布に近づくことが知られている。それゆえ、日率の収益率分布が正規分布よりも急尖的な、あるいは、歪んだ分布をしていて、他の幾何レヴィ過程モデルを用いた方が当てはまりがよいという結果が出ていたとしても、その程度がさほど大きくなければ、ブラック・ショールズモデルとほとんど差がないという結果は十分予想できる結果であったといえる。

本節の分析から、原証券の収益率分布に急尖的特徴が認められるときにはブラック・ショールズモデルにかえて幾何レヴィ過程モデルを用いることによって、オプション評価のパフォーマンスが向上する可能性があることをみた。とはいえ、対象とする分布はやはり正規分布に近く、実際の誤差の改善度はさほど高くなかったことも事実である。すなわち、現実に観察されるオプション価格の評価誤差の多くは原証券の収益率分布の非正規性以外の要因によってもたらされている可能性が高い。そして、注目すべきは、原証券の収益率分布の非正規性を捉えた下でのオプション評価誤差には、ITM に対しては理論モデルはオプション価格を実際の市場価格よりも過小に評価し、OTM では過大評価するという傾向が観察できるということである。そして、正規分布にかなり近かった期間 B においても同様の傾向

が見られるということである。このことは、現実のオプション価格の評価誤差には、原証券市場の非正規性以外の重要な要因が存在している可能性があることを示唆するものであるといえる。そして、この誤差の傾向はボラティリティ・スマイル（スキュー）としてよく知られている特徴である。したがって、ボラティリティ・スマイル（スキュー）の観点からの分析が必要といえるであろう。

表5 Out-of-Sample Pricing Errors : Term A

moneyness M K/S	Model (Measure)	Pricing Errors		
		ARPE	RMSE	MER
$M < 0.90$	Back-Scholes	0.03286	128.0522	0.03108
	Merton (MEMM)	0.03273	127.7976	0.03089
	VG (MEMM)	0.03308	128.4971	0.03149
	NIG (MEMM)	0.03275	127.7548	0.03093
<i>sample size</i>		{732}		
$0.90 \leq M < 0.95$	Back-Scholes	0.05237	107.9721	0.01778
	Merton (MEMM)	0.05194	107.3411	0.01764
	VG (MEMM)	0.05218	108.3608	0.02288
	NIG (MEMM)	0.05205	107.5908	0.01835
<i>sample size</i>		{1702}		
$0.95 \leq M < 1.00$	Back-Scholes	0.13738	125.9779	-0.05782
	Merton (MEMM)	0.13422	124.4152	-0.05236
	VG (MEMM)	0.12774	120.8360	-0.03558
	NIG (MEMM)	0.13361	124.2452	-0.05010
<i>sample size</i>		{3486}		
$1.00 \leq M < 1.05$	Back-Scholes	0.50047	127.6511	-0.37742
	Merton (MEMM)	0.48791	125.5763	-0.36856
	VG (MEMM)	0.45669	119.2297	-0.32200
	NIG (MEMM)	0.48284	124.6844	-0.36137
<i>sample size</i>		{4396}		
$1.05 \leq M < 1.10$	Back-Scholes	1.13510	88.8093	-0.86245
	Merton (MEMM)	1.12390	87.9220	-0.87094
	VG (MEMM)	1.04720	84.0649	-0.76660
	NIG (MEMM)	1.10790	87.0836	-0.85361
<i>sample size</i>		{2483}		
$1.10 \leq M$	Back-Scholes	0.84951	41.9785	0.05944
	Merton (MEMM)	0.84311	42.2937	0.03544
	VG (MEMM)	0.81236	42.3479	0.11928
	NIG (MEMM)	0.82924	41.7820	0.04651
<i>sample size</i>		{717}		
ALL	Back-Scholes	0.46018	115.2889	-0.28903
	Merton (MEMM)	0.45282	113.8933	-0.28760
	VG (MEMM)	0.42532	110.2531	-0.24382
	NIG (MEMM)	0.44734	113.4245	-0.28082
<i>sample size</i>		{13516}		

表 6 Out-of-Sample Pricing Errors : Term B

moneyness M K/S	Model (Measure)	Pricing Errors		
		ARPE	RMSE	MER
$M < 0.90$	BS	0.04641	162.9266	0.03246
	Merton (MEMM)	0.04635	162.7176	0.03225
	VG (MEMM)	0.04647	163.3379	0.03266
	NIG (MEMM)	0.04644	162.9752	0.03247
<i>sample size</i>		{3645}		
$0.90 \leq M < 0.95$	BS	0.07496	131.2571	-0.000383
	Merton (MEMM)	0.07502	131.1705	-0.000749
	VG (MEMM)	0.07523	132.0135	-0.000477
	NIG (MEMM)	0.07497	131.2762	-0.000473
<i>sample size</i>		{2002}		
$0.95 \leq M < 1.00$	BS	0.11039	103.0554	-0.04725
	Merton (MEMM)	0.10991	102.8789	-0.04620
	VG (MEMM)	0.11088	103.6471	-0.04774
	NIG (MEMM)	0.11002	103.0867	-0.04616
<i>sample size</i>		{2832}		
$1.00 \leq M < 1.05$	BS	0.22931	79.6829	-0.15556
	Merton (MEMM)	0.22754	79.5466	-0.15503
	VG (MEMM)	0.22641	80.2318	-0.15395
	NIG (MEMM)	0.22459	79.5350	-0.15130
<i>sample size</i>		{3547}		
$1.05 \leq M < 1.10$	BS	0.39543	68.7162	-0.25597
	Merton (MEMM)	0.39199	68.6788	-0.26120
	VG (MEMM)	0.38741	69.5143	-0.25337
	NIG (MEMM)	0.38569	68.6164	-0.25391
<i>sample size</i>		{3857}		
$1.10 \leq M$	BS	0.77903	48.9294	-0.51087
	Merton (MEMM)	0.78244	49.0493	-0.52420
	VG (MEMM)	0.76649	49.5847	-0.50591
	NIG (MEMM)	0.78449	49.1335	-0.54532
<i>sample size</i>		{13260}		
ALL	BS	0.45638	89.5693	-0.28581
	Merton (MEMM)	0.45721	89.5046	-0.29246
	VG (MEMM)	0.44934	90.1092	-0.28305
	NIG (MEMM)	0.45697	89.6105	-0.30060
<i>sample size</i>		{29143}		

4 [GLP & MEMM] モデルとボラティリティ・スマイル/スキュー

ボラティリティ・スマイル/スキューという特徴は様々なオプション市場で一般的に観察されている現象である。例えば，Rubinstein (1994, 1996) や Dumas *et al.* (1998) , Cont and Fonseca (2002) などが指摘しているように S&P500 株価指数オプションにおいてボラティリティ・スキューが観察されている。また UK の FTSE-100 (Ncube (1996) など) やドイツの DAX (Hafner and Wallmeier (2000)) , スペインの IBEX-35 (Pena *et al.* (1999)) などの各国の株価指数オプション市場においても観察されている。そして，第 3 章で指摘したように日経 225 株価指数オプションにもその特徴がみられた。また，通貨オプション市場においてもボラティリティ・スマイル/スキューが観察されている (第 6 章)。

ボラティリティ・スマイル/スキューは，ブラック・ショールズモデルによってオプション価格を評価した場合に市場価格との誤差に一定の傾向が存在することを意味するものである。すなわち，オプション市場ではブラック・ショールズモデルに組み込まれていない何らかの特徴がオプション価格を評価するうえで重要視されていることを示唆するものである。ボラティリティ・スマイル/スキューの原因の 1 つとして考えられているのが原資産価格のジャンプ・リスクである。Rubinstein (1994) によれば，CBOE で取引されている S&P500 株価指数オプションに関してブラック・マンデー以前と以後とを比較した場合にはブラック・マンデー以降にはボラティリティ・スキューの傾向が顕著に現れるようになっている。そして，その原因としてオプション価格には株価のジャンプ・リスクに対するプレミアムが上乘せされるようになった可能性があることが指摘されている。

オプション市場参加者の将来の株価に対する予測を推定するために，オプション価格を用いてリスク中立密度関数を推定することが行われている。そして，その結果として推定されたリスク中立密度関数は正規分布よりも急尖的な，あるいは，左右非対称な分布をしていることが観察されている (Ait-Sahalia and Lo (1998) など)。リスク中立密度関数の急尖の特徴と左右非対称性は，ボラティリティ・スマイル/スキューの形状と対応することが知られている。このことから，ボラティリティ・スマイル/スキューはオプション市場参加者が将来時点の収益率分布を急尖的な，あるいは，左右非対称な分布をしていると予想しているこ

とによってもたらされている可能性が高いといえる。もしそうであるならば、ボラティリティ・スマイル/スキュー現象はブラック・ショールズモデルから収益率分布の非正規性を説明できるモデルである幾何レヴィ過程モデルに拡張することに対する実証的な根拠となる。確率的ボラティリティモデルはボラティリティ・スマイル/スキュー現象を説明できるモデルとしてよく知られている。しかしながら、このモデルでは株価のジャンプ・リスクに起因する収益率分布の非正規性を説明することはできない。

ボラティリティ・スマイル/スキュー現象を説明できるモデルとして [Merton & MCMM] モデルや [G-NIG & ESMM] モデル (Prause (1999) など), VG モデル (Madan *et al.* (1998) など) などの幾何レヴィ過程モデルが知られている。実際、これらのモデルは原資産過程とリスク中立過程は同じ幾何レヴィ過程に従うモデルであることから、これらのモデルがボラティリティ・スマイル/スキューという特徴を構造的に持っているであろうことは容易にわかる。例えば、[G-NIG & ESMM] モデルのリスク中立過程は再び幾何 NIG 過程に従うことからリスク中立密度関数の特徴は容易にわかる。しかしながら、[GLP & MEMM] モデルの場合には、その数学的な複雑さから必ずしもリスク中立密度関数の特徴について解析的に判断することは難しい。そこで、本章では、[GLP & MEMM] モデルがボラティリティ・スマイル/スキューという特徴を構造的に持っているモデルであるか、そしてその特徴を持っている場合にはどのようなバリエーションのボラティリティ・スマイル/スキューを示し得るのかについてシミュレーション分析を行うことで調べる。また、ボラティリティ・スマイル/スキューの再現性という点で [GLP & MEMM] モデルとそのほかの幾何レヴィ過程モデルとに差異があるかどうかについての分析も行う。

本章の内容は次のようになっている。まず、4.1 節ではボラティリティ・スマイル/スキューについての簡単な説明を行っている。4.2 節ではシミュレーション分析を行った結果について述べる。この分析から、[GLP & MEMM] モデルはボラティリティ・スマイル/スキューを構造的に有しており、また、[GLP & MEMM] モデルが示すインプライド・ボラティリティの形状のバリエーションは幾何レヴィ過程に依存することが分かった。4.3 では、ボラティリティ・スマイル/スキューの再現性という観点から MEMM とそのほかの同値マルチンゲール測度の比較分析を行っている。

4.1 ボラティリティ・スマイル/スキューとは

ボラティリティ・スマイル(スキュー)とは、オプション市場で観察される重要な特徴で、ブラック・ショールズモデルの限界を示すものである。オプションの市場価格はブラック・ショールズモデルの理論価格と比較して、誤差に一定の傾向を持つことが観察されている。特に、ATM に対して、ITM、OTM のオプションがブラック・ショールズモデルより相対的に過大に評価される傾向は、ボラティリティ・スマイルと呼ばれている。また、ATM に対して、ITM のオプションがブラック・ショールズモデルよりも相対的に過大に評価され、OTM のオプションが相対的に過小に評価される傾向は、ボラティリティ・スキューと呼ばれている。ボラティリティ・スマイル(スキュー)は、ブラック・ショールズモデルがボラティリティに関して単調増大な関数である点に注意すれば、行使価格(もしくは、マニネス)に対してインプライド・ボラティリティをプロットすることでも確認できる。図3は、2004年12月15日に取引された残存期間57の日経225コール・オプションのインプライド・ボラティリティをプロットしたものである。この図のようにU字型の形状を示す場合がボラティリティ・スマイルと呼ばれる。また、図4のように、マニネスに対して単調減少するような形状をしている場合がボラティリティ・スキューと呼ばれている。

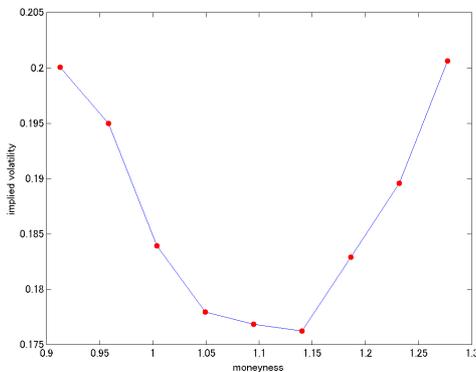


図3 ボラティリティ・スマイル：
2004/12/15, 残存期間 57 日

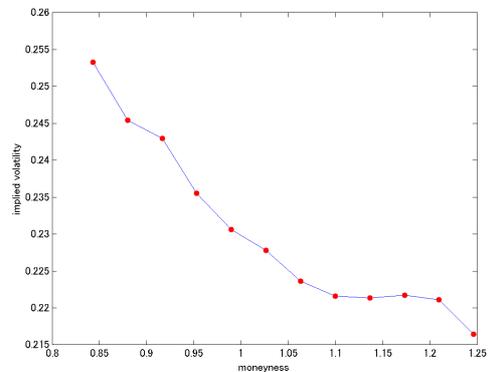


図4 ボラティリティ・スキュー：
2001/1/4, 残存期間 289 日

ここに、インプライド・ボラティリティ $\sigma^{(im)}$ とは、

$$\exists \sigma, \quad C_{BS}(\sigma; K, T) = C^{(m)}(K, T)$$

なる σ のことをいう。ただし、 $C^{(m)}$ はヨーロッパ型コール・オプションの市場価格を表す

ものとし、また、 C_{BS} はヨーロッパ型コールオプションに対するブラック・ショールズの公式：

$$C_{BS} = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2)$$

を表すものとする。ここで $\Phi(d)$ は正規分布の分布関数であり、また、

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

であるとする。

また、マニネスとは K/S_0 で定義され、マニネスが 1 の場合をアット・ザ・マネー (ATM)、1 以下の場合をイン・ザ・マネー (ITM)、1 以上の場合をアウト・オブ・ザ・マネー (OTM) と呼ぶ。

ここで、日経 225 コール・オプション市場では、ボラティリティ・スマイル (スキュー) が観察できるか調べてみた。ただし、オプションの理論価格の取り得る範囲外にあった市場価格データは除外している。その結果をまとめたものが表 7, 8 である。この表から分かるように、日経 225 コール・オプション市場では傾向として残存期間が短い場合 (60 日未満の場合) にはボラティリティ・スマイルが観察された。また、残存期間が長い (60 日以上) の場合には、はっきりとまでは言えないが 2000 年以降傾向としてボラティリティ・スキューが観察された。短期的には、株価が (上昇・下降ともに) 急激に変化すること事態がリスクとなり得るのでボラティリティ・スマイルが観察されることは妥当なことであろう。その一方で、長期的には、株価が急激に変化するリスクというよりも、株価が大きく下落することがリスクとなる。また、長期的には株価が上昇することはリスクとはなりえないであろう。したがって、残存期間が長期のオプションに対してボラティリティ・スキューが観察されることも妥当なことであるといえる。ここで観察された、残存期間が短い場合にはボラティリティ・スマイルが、長い場合にはボラティリティ・スキューが観察されるという傾向は、他の株価指数オプション市場においても観察されている特徴である (see Hafner and Wallmeiry (2000))。このように、残存期間の長さによってボラティリティの特徴が異なることはよく知られていることである。

表7 営業日ベースで残存期間が60日未満の場合のインプライド・ボラティリティ $\sigma^{(im)}$ とヒストリカル・ボラティリティ $\hat{\sigma}$ の相対的な差： $(\sigma^{(im)} - \hat{\sigma})/\hat{\sigma}$ の平均値・ヒストリカル・ボラティリティは直近の180営業日分のデータから計算した。

moneyiness	1995	1996	1997	1998	1999
$M < 0.90$	1.52324 (269)	1.63655 (182)	1.48710 (194)	0.806789 (421)	0.84310 (659)
$0.90 \leq M < 0.95$	0.50255 (526)	0.40596 (480)	0.51337 (523)	0.288589 (655)	0.20291 (970)
$0.95 \leq M < 1.05$	0.15192 (2025)	0.03969 (2414)	0.14584 (2084)	0.027019 (1968)	-0.04190 (2352)
$1.05 \leq M < 1.10$	0.15795 (788)	0.09933 (616)	0.14810 (834)	0.012777 (920)	-0.06547 (904)
$M \geq 1.10$	0.42513 (457)	0.32262 (90)	0.29870 (752)	0.140863 (994)	-0.04854 (381)

()内はデータ数

moneyiness	2000	2001	2002	2003	2004
$M < 0.90$	1.04436 (432)	1.34008 (1540)	1.45125 (1217)	2.27720 (504)	2.40598 (291)
$0.90 \leq M < 0.95$	0.38857 (853)	0.39518 (769)	0.18590 (495)	0.21543 (378)	0.16218 (359)
$0.95 \leq M < 1.05$	0.10152 (2373)	0.12434 (1653)	0.02434 (1304)	0.05494 (1189)	-0.03765 (1471)
$1.05 \leq M < 1.10$	0.07129 (985)	0.08932 (875)	0.02417 (705)	0.08645 (649)	-0.02401 (781)
$M \geq 1.10$	0.15789 (1347)	0.17185 (3003)	0.08297 (2361)	0.14602 (1936)	0.01492 (1665)

()内はデータ数

表8 営業日ベースで残存期間が60日以上の場合のインプライド・ボラティリティ $\sigma^{(im)}$ とヒストリカル・ボラティリティ $\hat{\sigma}$ の相対的な差： $(\sigma^{(im)} - \hat{\sigma})/\hat{\sigma}$ の平均値・ヒストリカル・ボラティリティは直近の180営業日分のデータから計算した。

moneyiness	1995	1996	1997	1998	1999
$M < 0.90$	-0.28068 (2)	NA (0)	-0.12061 (3)	0.06076 (35)	-0.03059 (34)
$0.90 \leq M < 0.95$	-0.04024 (21)	-0.06016 (10)	-0.09083 (32)	-0.09179 (124)	-0.06924 (254)
$0.95 \leq M < 1.05$	0.00939 (289)	-0.03130 (319)	-0.03381 (328)	-0.02738 (575)	-0.05099 (830)
$1.05 \leq M < 1.10$	0.02713 (171)	-0.00499 (74)	0.01222 (111)	-0.02242 (264)	-0.07382 (311)
$M \geq 1.10$	0.18343 (53)	-0.03313 (5)	0.07558 (24)	0.07508 (136)	-0.06851 (76)

()内はデータ数

moneyiness	2000	2001	2002	2003	2004
$M < 0.90$	0.12223 (239)	0.23829 (1880)	0.25070 (1233)	0.26764 (157)	0.23112 (69)
$0.90 \leq M < 0.95$	0.08071 (448)	0.12925 (1061)	-0.00325 (533)	-0.00731 (141)	-0.04901 (88)
$0.95 \leq M < 1.05$	0.04511 (1172)	0.06200 (2202)	-0.05962 (1288)	-0.02834 (559)	-0.07059 (563)
$1.05 \leq M < 1.10$	0.01543 (539)	0.02570 (1172)	-0.07179 (771)	-0.01046 (460)	-0.07270 (491)
$M \geq 1.10$	0.00976 (722)	-0.00646 (5349)	-0.07630 (3253)	-0.02984 (1998)	-0.06949 (1781)

()内はデータ数

4.2 [GLP & MEMM] モデルが示すインプライド・ボラティリティの特徴について

本節では，[GLP & MEMM] モデルがボラティリティ・スマイル/スキューという特徴を構造的にもっているかどうか，そして，その特徴を持っている場合にはどのような形状を示すのかについてシミュレーションによる分析を行った．ここでは，[GLP & MEMM] モデルとして特に [G-Stable & MEMM] モデルと [G-VG & MEMM] モデルに注目して詳しく分析を行った．

[G-Stable & MEMM] モデルと [G-VG & MEMM] モデルは，4.2.1 節及び 4.2.2 節の図からわかるように，インプライド・ボラティリティをプロットすると様々な形状を示す．特に重要なのは，その形状がプロセスに依存していたことである．実際，[G-Stable & MEMM] モデルと [G-VG & MEMM] モデルを比較した場合には，[G-Stable & MEMM] モデルの方がよりバリエーション豊かな形状を示していた．そのことは，4.2.3 節での分析からも明らかであろう．この結果は，ボラティリティ・スマイル/スキューという観点からオプション市場分析を行う場合には [G-Stable & MEMM] モデルが有効なモデルとなる可能性が高いことを意味するものである．つまり，[G-Stable & MEMM] モデルの重要性を示す結果といえる．

4.2.1 [G-Stable & MEMM] モデルの場合

本節では [G-Stable & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティの特徴について述べる．図 5，図 6，図 7，図 8 は [G-Stable & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティをプロットした図である．ここで，この図を描く際に用いたその他のパラメータの値は $S = 1, r = 0.0, T = 0.25$ である．この図からもわかるように，シミュレーション分析を行ったところ，[G-Stable & MEMM] モデルは，様々な形状のインプライド・ボラティリティの特徴を示した．ブラック・ショールズモデルの場合には水平線しか描かれないのと対照的な結果といえる．

これらの図からは， α は主にインプライド・ボラティリティの曲線の曲がり具合に関連するパラメータであることがわかる．また， c_1, c_2 の大小関係はインプライド・ボラティリティの傾きに，そして， $c_1 + c_2$ の大小関係はインプライド・ボラティリティの水準に関連するパラメータであるといえる．

結果として、[G-Stable & MEMM] モデルはボラティリティ・スマイルとボラティリティ・スキュー両方の特徴を説明できるモデルであった。

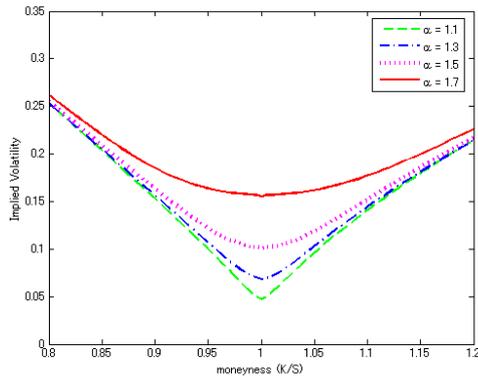


図 5 [G-Stable & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ：
 $c_1 = c_2 = 0.005, b = 0.0$

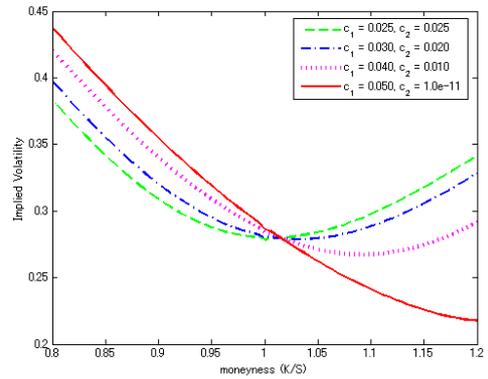


図 6 [G-Stable & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ：
 $\alpha = 1.5, b = 0.0$

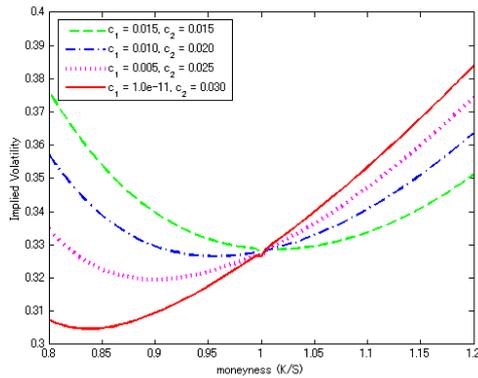


図 7 [G-Stable & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ：
 $\alpha = 1.75, b = 0.0$

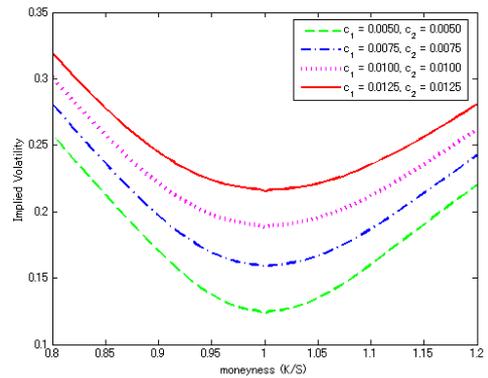


図 8 [G-Stable & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ：
 $\alpha = 1.6, b = 0.0$

また, $\alpha = 2$ の場合には安定分布は正規分布に従う. それゆえ, $\alpha \rightarrow 2$ の場合には [G-Stable & MEMM] モデルは漸近的にブラック・ショールズモデルに近づくであろう. このことは, 図 9 から分かる.

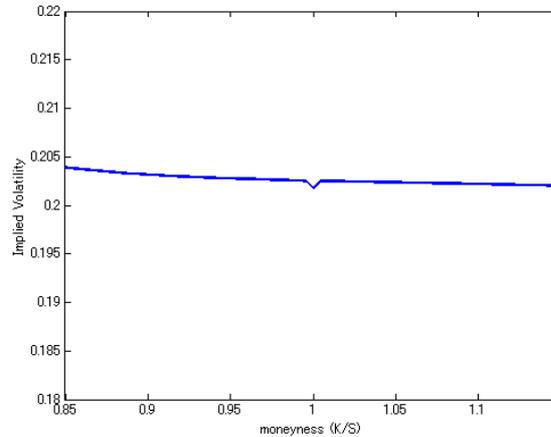


図 9 平均 0, 分散 $(0.2)^2$ の正規分布に従う乱数を 5000 個生成させ, この正規乱数を用いて安定分布のパラメータを最尤法によって推定した. 安定分布の尤度は, 安定分布の特性関数 (2.8) を利用して数値解析的に計算した. このときの推定値は $b = 9.9998\text{E-}9, \alpha = 1.9995, c_1 = 1.0107\text{E-}5, c_2 = 1.0342\text{E-}5$ であった. このパラメータ値を用いて [G-Stable & MEMM] モデルでのオプション価格を計算し, そのときのインプライド・ボラティリティをプロットしたものがこの図である. ここでその他のパラメータの値は $S = 1.0, r = 0.0, T = 0.5$ としている. この図からわかるように, インプライド・ボラティリティの値は 0.2 に非常に近い値となっており, ブラック・ショールズモデルの場合に非常に近い結果となった.

4.2.2 [G-VG & MEMM] モデルの場合

本節では [G-VG & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティの特徴について述べる。図 10, 図 11, 図 12 は [G-VG & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティをプロットした図である。これらの図から, パラメータ C はインプライド・ボラティリティの曲がり具合に関連するパラメータであることがわかる。また, [G-VG & MEMM] モデルのパラメータ C, c_1, c_2 はいずれもインプライド・ボラティリティの水準に大きく影響を与えるパラメータであった。ただし, パラメータ C, c_1, c_2 はインプライド・ボラティリティの傾き具合には必ずしも大きく影響しているわけではなかった。それゆえ, [G-VG & MEMM] モデルは必ずしもボラティリティ・スキューを説明できるわけではないようである。

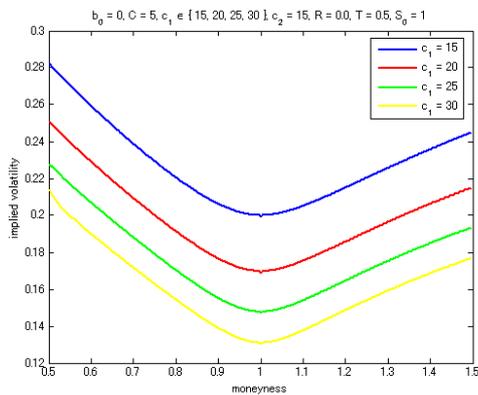


図 10 [G-VG & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ

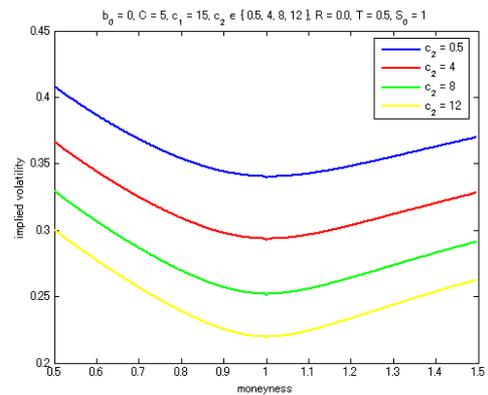


図 11 [G-VG & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ

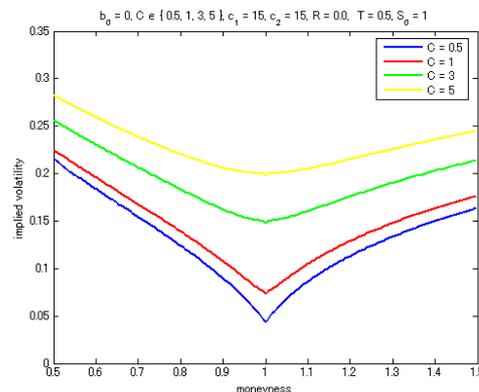


図 12 [G-VG & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ

4.2.3 [G-Stable & MEMM] モデル v.s. [G-VG & MEMM] モデル

4.2.1 節及び 4.2.2 節からわかるように，インプライド・ボラティリティの特徴は幾何レヴィ過程に依存しているといえる．特に，[G-VG & MEMM] モデルに比べて [G-Stable & MEMM] モデルはバリエーション豊かなインプライド・ボラティリティの形状を示していた．このことがボラティリティ・スマイル/スキューの再現性に対してどの程度影響するのか調べるために，ボラティリティ・スマイルとボラティリティ・スキューの特徴が現れていた市場データを使ってモデルの当てはまり度合いを比較した．

使用したデータは，日経 225 株価指数コールオプションのデータの中から特に 2000 年 1 月 18 日の残存期間 37 日（営業日ベース）のオプションデータと 2001 年 2 月 7 日で残存期間 21 日（営業日ベース）のオプションデータである．それぞれの期間において，ボラティリティ・スキューとボラティリティ・スマイルが観察されている．

パラメータの推定は

$$\text{SSE}(\Theta_t) := \sum_{i=1}^n |\sigma(K_i, T) - \text{Vol}(\eta(\Theta_t, K_i, T))|^2 \rightarrow \min$$

を解くことによって行った．ここに， σ は市場データから求められたインプライド・ボラティリティを表すものとし， $\text{Vol}(\eta(\Theta_t))$ はモデルの理論価格 η から計算されるインプライド・ボラティリティを表すものとする．そして，カリブレートした結果をプロットした図が図 13，図 14，図 15，図 16 である．これらの図からもわかるように，[G-VG & MEMM] モデルに比べて [G-Stable & MEMM] モデルの方が当てはまりが良かった．このことはボラティリティ・スキューに対して頓に顕著であった¹⁷⁾．

2000 年 1 月 18 日，残存期間 37 日のデータに対しては，[G-Stable & MEMM] モデルの場合の 2 乗誤差の和は 0.00019 であったのに対して，[G-VG & MEMM] モデルの場合には 0.00701 であった．したがって，この場合には明らかに [G-Stable & MEMM] モデルの方が当てはまりが良かった．このときの推定されたパラメータ値は，それぞれ， $(b = -0.0005, \alpha = 1.458, c_1 = 0.035, c_2 = 0.006)$ ， $(b_0 = 0.006, C = 1.294, c_1 = 4.946, c_2 = 5.029)$ であった．また，2001 年 2 月 7 日，残存期間 21 日の場合には [G-Stable & MEMM] モデルの場合の 2 乗誤差の和は 0.0029 であったのに対して，[G-VG & MEMM] モデルの場合には 0.0095 であった．このときのパラメータ値は $(b = -0.006, \alpha = 1.873, c_1 = 0.001, c_2 = 0.003)$ ， $(b_0 = 0.019, C = 14.68, c_1 = 24.13, c_2 = 23.87)$ であった．

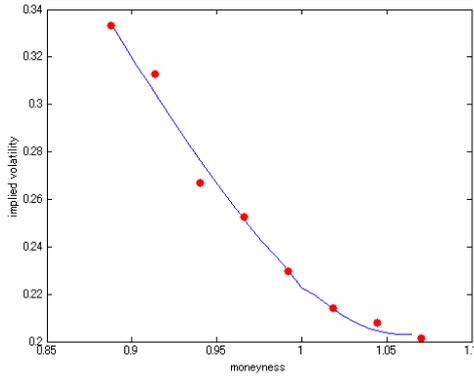


図 13 [G-Stable & MEMM] モデルの場合：2000 年 1 月 18 日，残存期間 37 日

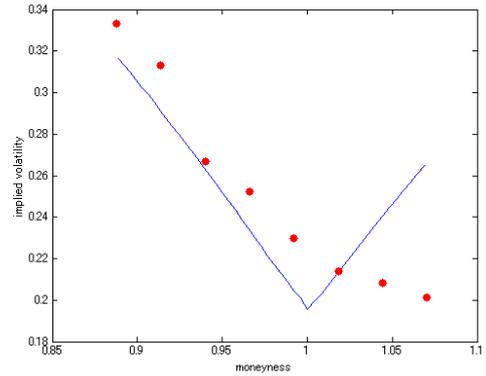


図 14 [G-VG & MEMM] モデルの場合：2000 年 1 月 18 日，残存期間 37 日

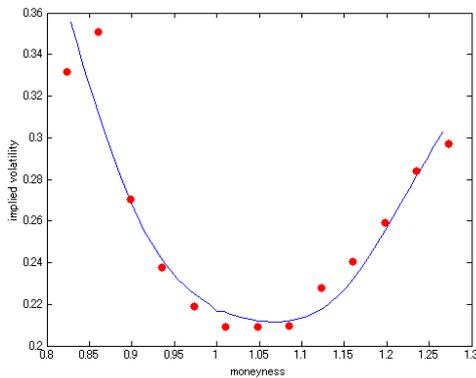


図 15 [G-Stable & MEMM] モデルの場合：2001 年 2 月 7 日，残存期間 21 日

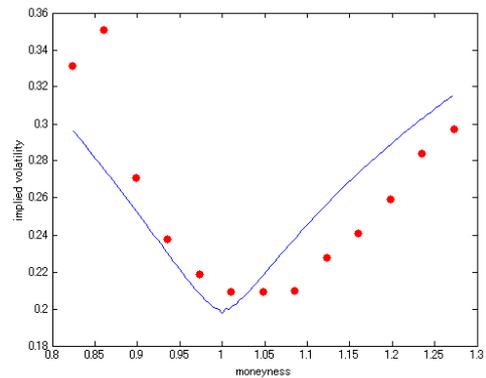


図 16 [G-VG & MEMM] モデルの場合：2001 年 2 月 7 日，残存期間 21 日

[G-NIG & MEMM] モデルに対しても同様の分析を行ったが，この場合も [G-Stable & MEMM] モデルの方が当てはまりが良かった¹⁸⁾。

4.3 ボラティリティ・スマイル/スキューに対する再現性のテスト

4.2.3 節での分析から明らかなように，ボラティリティ・スマイル/スキューに対する再現性は幾何レヴィ過程に依存する．では，同値マルチンゲール測度をかえた場合にはその再現性に变化はあるのであろうか．4.2.3 節と同様の分析を [G-VG & ESMM] モデルに対して行ってみた．その結果，2000 年 1 月 18 日，残存期間 37 日のデータに対しては，SSE の

値は 0.0069 , パラメータ値は $(b_0 = 0.008, C = 1.965, c_1 = 13.00, c_2 = 0.453)$ であった .
 また , 2001 年 2 月 7 日 , 残存期間 21 日の場合には SSE の値は 0.0087 , パラメータ値は
 $(b_0 = 0.056, C = 13.86, c_1 = 22.06, c_2 = 23.93)$ であった . このときの結果をプロットし
 たものが図 17 , 図 18 である . これらの結果を見る限りは , 同値マルチンゲール測度をかえ
 たことによるボラティリティ・スマイル/スキューの再現性への影響はほとんどないといっ
 てよい . 幾何 NIG 過程の場合でも同様の分析を行ったが , MEMM と ESMM で大きな違
 いは見られなかった¹⁹⁾ .

そこで , 同値マルチンゲール測度の選択の問題についてさらに詳しく調べることにする .

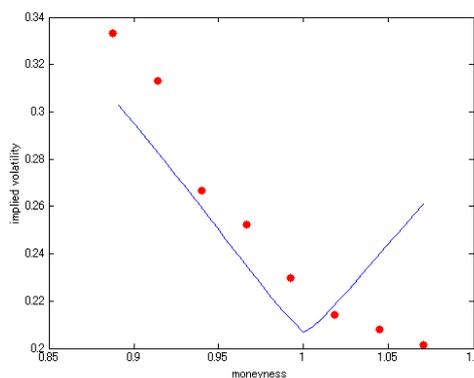


図 17 [G-VG & ESMM] モデルの
 場合 : 2000 年 1 月 18 日 , 残存期間
 37 日

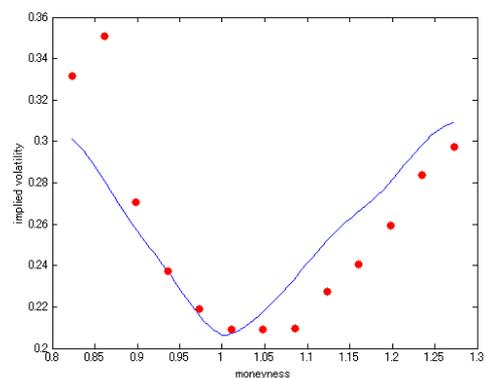


図 18 [G-VG & ESMM] モデルの
 場合 : 2001 年 2 月 7 日 , 残存期間
 21 日

ここでの分析の目的は , 幾何レヴィ過程モデルのボラティリティ・スマイル/スキューに
 対する再現性が同値マルチンゲール測度の選択に影響を受けるのかどうかを調べることで
 ある . そこで , 対象とするモデルとして Merton モデル , 幾何 VG 過程モデルそして幾何
 NIG 過程モデルを選択した . また , 比較対象とする同値マルチンゲール測度の候補として
 は , MEMM , MCMM , ESMM そして MMM の 4 つの測度とした .

実際のデータを使って再現性について調べてみた . 具体的には , 日経 225 コール・オブ
 ション市場では , ボラティリティ・スマイルが観察されていることから , この特徴に対して
 幾何レヴィ過程モデルがどの程度当てはまるのか , 各 $j, j = 1, 2, \dots, 12$ に対して

$$SSE_j(\theta) = \sum_i \left| C_i^{(m)}(\theta) - \hat{C}_i^{A_j^{2001}} \right|^2 \xrightarrow{\theta} \min$$

なるカリブレーション問題を数値解析的に解くことで分析を行なった . ここで , A_1^{2001} と

は 2001 年 1 月の 1 ヶ月間を表すものとし、 A_j^{2001} は 2001 年 j 月の 1 ヶ月間を表すものとする。また、 $C^{(m)}$ で理論価格を表すものとし、 \hat{C}^A は期間 A の間に実際に取引されたオプションの市場価格を表すものとする。ここで、オプションの理論価格の計算方法は前章と同様であるが、[Merton & MCMM] モデルに関しては Merton (1976) の公式を用いた。ここで、分析の対象期間を 2001 年としたのは、表 7, 8 より、この期間が残存期間が短期（長期）の場合にはボラティリティ・スマイル（ボラティリティ・スキュー）が観察されるという傾向が顕著であったからである。

また、カリブレーション問題の性格上、ノイズが多く含まれているデータがあると推定結果が不安定になってしまう。そのため、ここでは、対象とするオプション価格として、残存期間（営業日ベース）が 5 日以下のものと 250 日より長いものは除外した。また、ATM から極端に外れたオプション（マニネスが 0.8 未満のものと 1.2 以上のもの）も除外した。除外したこれらのオプション価格は、いずれも流動性などの影響でノイズを含みやすいデータである。

表 9 分析対象とした日経 225 ヨーロッパ型コールオプションの各マニネスにおける平均価格

moneyness	$0.80 \leq M < 0.90$	$0.90 \leq M < 0.95$	$0.95 \leq M < 1.00$
average price	2077.1925	1362.5892	930.6132
moneyness	$1.00 \leq M < 1.05$	$1.05 \leq M < 1.10$	$1.10 \leq M < 1.20$
average price	616.4946	400.8592	214.9851

この分析結果をまとめたものが表 10, 11 である。表 10, 11 から、幾何レヴィ過程モデルはブラック・ショールズモデルと比較して当てはまりのよいモデルであることが分かる。幾何レヴィ過程モデルはブラック・ショールズモデルよりもパラメータ数が多いため当てはまりがよくなるのはある意味当然の結果ともいえるが、ITM, OTM における誤差が改善されている点から、幾何レヴィ過程モデルを用いることでオプション市場の特徴であるボラティリティ・スマイルを説明できている点が重要である。さらに、この結果からは、当てはまりのよし悪しは必ずしも同値マルチンゲール測度としてどの測度を選択したかには依存しないことが分かる。

この結果は大変興味深く、結果として、同値マルチンゲール測度は各プロセスに対して数値計算の行ないやすいものを選択すればよいだろう。また、数値計算のコストを考えないとすれば、MEMM は適用できる幾何レヴィ過程のクラスが非常に広いので、複数の同値マル

チンゲール測度を考えなくても MEMM を使っている限りは重要なプロセスが分析モデルの候補から除外されてしまうリスクはなくなるともいえる。

注

- 17) Carr and Wu (2003) の FMLS モデルはボラティリティ・スキューを説明できるモデルとしてよく知られている。そこでボラティリティ・スキューが観察された 2000 年 1 月 18 日、残存期間 37 日のデータに対して同様の分析を行った。このときの 2 乗誤差の和は 0.00044 であった。また、このときの推定されたパラメータ値は、 $(\alpha = 1.564, \sigma = 0.166)$ であった。

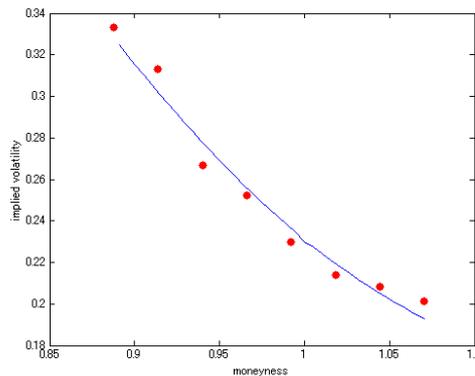


図 19 FMLS モデルの場合：2000 年 1 月 18 日，残存期間 37 日

- 18) [G-NIG & MEMM] モデルに対しても同様の分析を行った。このときの結果をプロットした図が図 20，図 21 である。

2000 年 1 月 18 日，残存期間 37 日のデータに対しては，[G-NIG & MEMM] モデルの場合の 2 乗誤差の和は 0.00461 であった。このときの推定されたパラメータ値は，それぞれ， $(b_0 = 0.019, \alpha = 1.620, \beta = 0.039, \delta = 0.219)$ であった。また，2001 年 2 月 7 日，残存期間 21 日の場合には [G-NIG & MEMM] モデルの場合の 2 乗誤差の和は 0.00988 であった。このときのパラメータ値は $(b_0 = -0.006, \alpha = 12.61, \beta = 0.063, \delta = 0.642)$ であった。

したがって，[G-NIG & MEMM] モデルの場合にも [G-Stable & MEMM] モデルの方が当てはまりが良かった。

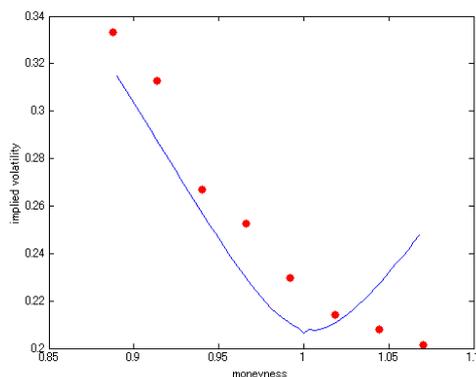


図 20 [G-NIG & MEMM] モデルの場合：2000 年 1 月 18 日，残存期間 37 日

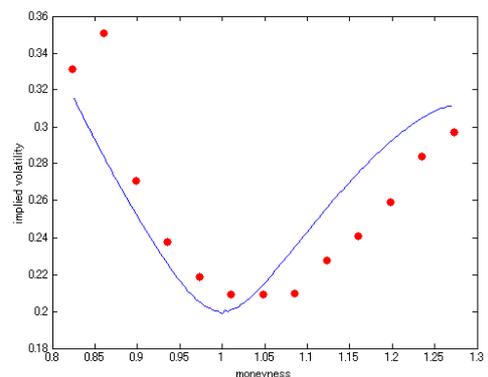


図 21 [G-NIG & MEMM] モデルの場合：2001 年 2 月 7 日，残存期間 21 日

19) 2000年1月18日, 残存期間37日のデータに対しては, [G-NIG & ESMM] モデルの場合の2乗誤差の和は0.00358であった. このときの推定されたパラメータ値は, それぞれ, ($b_0 = 0.034, \alpha = 1.432, \beta = 0.343, \delta = 0.188$) であった.

また, 2001年2月7日, 残存期間21日の場合には [G-NIG & ESMM] モデルの場合の2乗誤差の和は0.01138であった. このときのパラメータ値は ($b_0 = 0.024, \alpha = 14.03, \beta = 3.047, \delta = 0.649$) であった.

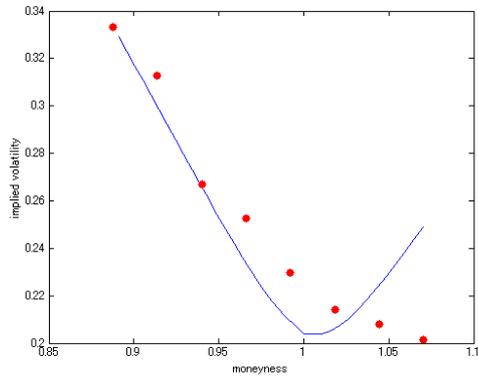


図 22 [G-NIG & ESMM] モデルの場合 : 2000年1月18日, 残存期間37日

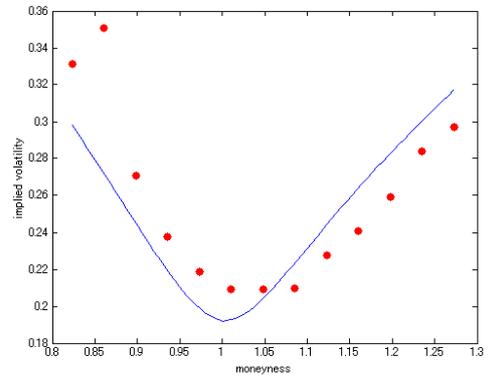


図 23 [G-NIG & ESMM] モデルの場合 : 2001年2月7日, 残存期間21日

表 10 Calibration Results

moneyness M K/S	Model (Measure)	Fitting Errors		
		RMSE	ARPE	MER
$0.80 \leq M < 0.90$	BS	222.4643	0.07516	0.05262
	Merton (MMM)	207.8630	0.07219	0.03232
	Merton (MCMM)	192.3287	0.06776	0.01725
	Merton (ESMM)	192.3472	0.06787	0.01644
	Merton (MEMM)	192.4219	0.06757	0.01697
<i>sample size</i>		{2351}		
$0.90 \leq M < 0.95$	BS	176.6221	0.09148	0.03197
	Merton (MMM)	170.6549	0.09122	0.00999
	Merton (MCMM)	166.2486	0.08819	0.00125
	Merton (ESMM)	166.6995	0.08929	0.00029
	Merton (MEMM)	166.2065	0.08877	0.00070
<i>sample size</i>		{1715}		
$0.95 \leq M < 1.00$	BS	147.1463	0.11271	0.00016
	Merton (MMM)	144.4296	0.11050	-0.00291
	Merton (MCMM)	145.1105	0.11099	0.00273
	Merton (ESMM)	146.2791	0.11329	0.00409
	Merton (MEMM)	145.5985	0.11271	0.00398
<i>sample size</i>		{1745}		
$1.00 \leq M < 1.05$	BS	110.4048	0.14228	-0.050055
	Merton (MMM)	107.5974	0.12864	-0.010649
	Merton (MCMM)	110.8786	0.14575	0.037696
	Merton (ESMM)	110.9169	0.14345	0.036871
	Merton (MEMM)	110.9470	0.14664	0.042057
<i>sample size</i>		{1850}		
$1.05 \leq M < 1.10$	BS	93.0555	0.21972	-0.11943
	Merton (MMM)	87.3083	0.18595	0.01634
	Merton (MCMM)	89.0010	0.21426	0.10770
	Merton (ESMM)	88.3433	0.21047	0.10783
	Merton (MEMM)	88.9693	0.21146	0.10884
<i>sample size</i>		{1896}		
$1.10 \leq M < 1.2$	BS	81.1689	0.39977	-0.23057
	Merton (MMM)	73.4062	0.45002	0.19620
	Merton (MCMM)	69.3510	0.35363	0.17153
	Merton (ESMM)	68.6999	0.37437	0.24909
	Merton (MEMM)	69.1783	0.33691	0.14870
<i>sample size</i>		{3625}		
ALL	BS	143.2457	0.20173	-0.07404
	Merton (MMM)	135.8649	0.20792	0.06149
	Merton (MCMM)	131.0261	0.18677	0.07155
	Merton (ESMM)	131.1236	0.19207	0.09270
	Merton (MEMM)	131.0951	0.18216	0.06609
<i>sample size</i>		{13182}		

表 11 Calibration Results

moneyness M K/S	Model (Measure)	Fitting Errors		
		RMSE	ARPE	MER
$0.80 \leq M < 0.90$	BS	222.4643	0.07516	0.05262
	VG (ESMM)	198.6133	0.06941	0.02546
	VG (MEMM)	200.2100	0.06898	0.02613
	NIG (ESMM)	195.1200	0.06884	0.01680
	NIG (MEMM)	193.4451	0.06784	0.01769
<i>sample size</i>		{2351}		
$0.90 \leq M < 0.95$	BS	176.6221	0.09148	0.03197
	VG (ESMM)	168.9767	0.09181	-0.00102
	VG (MEMM)	168.6756	0.09031	0.00052
	NIG (ESMM)	166.1658	0.08864	-0.00035
	NIG (MEMM)	165.9670	0.08883	-0.00389
<i>sample size</i>		{1715}		
$0.95 \leq M < 1.00$	BS	147.1463	0.11271	0.00016
	VG (ESMM)	146.1750	0.11446	-0.00766
	VG (MEMM)	146.6616	0.11594	-0.01188
	NIG (ESMM)	144.7869	0.11210	-0.00294
	NIG (MEMM)	145.3299	0.15020	-0.00189
<i>sample size</i>		{1745}		
$1.00 \leq M < 1.05$	BS	110.4048	0.14228	-0.050055
	VG (ESMM)	113.4038	0.15892	0.041321
	VG (MEMM)	111.8871	0.16392	0.040759
	NIG (ESMM)	107.8982	0.13323	0.000331
	NIG (MEMM)	113.3559	0.16204	0.059731
<i>sample size</i>		{1850}		
$1.05 \leq M < 1.10$	BS	93.0555	0.21972	-0.11943
	VG (ESMM)	89.6834	0.20770	0.06236
	VG (MEMM)	89.4716	0.23660	0.11357
	NIG (ESMM)	83.6774	0.17393	-0.04993
	NIG (MEMM)	90.0033	0.21308	-0.09338
<i>sample size</i>		{1896}		
$1.10 \leq M < 1.2$	BS	81.1689	0.39977	-0.23057
	VG (ESMM)	71.1094	0.32633	0.00628
	VG (MEMM)	71.1659	0.36043	0.13422
	NIG (ESMM)	66.9772	0.47972	0.13375
	NIG (MEMM)	69.6403	0.36483	0.00802
<i>sample size</i>		{3625}		
ALL	BS	143.2457	0.20173	-0.07404
	VG (ESMM)	133.9066	0.18139	0.01989
	VG (MEMM)	134.1603	0.19555	0.06212
	NIG (ESMM)	130.5066	0.21428	0.03221
	NIG (MEMM)	131.7411	0.26920	0.02692
<i>sample size</i>		{13182}		

5 ボラティリティ・スキューの観点からの日経 225 株価指数 オプションに対する分析

5.1 序論

第 3 章の分析では日経 225 株価指数オプションに対してもボラティリティ・スキューが観察された。一般に各国の株価指数オプション市場においてもボラティリティ・スマイル / スキュー現象が観察されており、この現象はオプション市場の重要な特徴の 1 つであるといえる。この現象の要因の 1 つとして考えられているのが株価のジャンプ・リスクである。Rubinstein (1994) によれば、CBOE で取引されている S&P500 株価指数オプションに関してブラック・マンデー以前と以後とを比較した場合にはブラック・マンデー以降にボラティリティ・スキューの傾向が顕著に現れるようになったことが観察されている。すなわち、現在オプション市場において観察されているボラティリティ・スキュー現象の多くの部分は将来の株価のジャンプ・リスクに対するプレミアムがオプション価格に上乘せされていることによってもたらされているといえる。

将来の株価がジャンプすることを予想する場合には、将来の株価収益率分布は正規分布よりも急尖的で、左右非対称な分布を想定することに対応するであろう。実際、オプション価格からリスク中立密度関数を推定した場合には、その分布は急尖的で、左右非対称な分布をしていることが指摘されている。そして、リスク中立密度関数の急尖的特徴と、左右非対称性はボラティリティ・スマイル / スキュー現象と対応していることが知られている。この結果は、ボラティリティ・スマイル / スキュー現象と将来の株価収益率分布の非正規性の関連性を示唆しているといえるだろう。

ブラック・ショールズモデルの場合にはインプライド・ボラティリティは一定であったため、ボラティリティ・スマイル / スキュー現象を説明することはできない。しかし、第 4 章のシミュレーション分析によって明らかとなったように [GLP & MEMM] モデルはボラティリティ・スマイル / スキューを説明できるモデルである。また、4.3 節の分析から [GLP & MEMM] モデルは日経 225 株価指数オプションに対して観察されたボラティリティ・スキューをある程度説明できることが分かっていた。

本章では、幾何レヴィ過程モデルに基づいてボラティリティ・スキューの観点から日経

225 株価指数オプションに対する実証分析を行う．分析の目的は次の 2 つである．

Rubinstein (1994) の分析からも分かるように S&P500 株価指数オプションに対して観察されているボラティリティ・スキュー現象の原因の多くの部分は将来の株価のジャンプ・リスクの影響であるといえるであろう．オプションとは将来の株価の変動リスクに対する保険的商品であることから将来の株価収益率分布が正規分布に従うと予想されない場合には，その影響は明確にオプション価格に反映される．そこで，1 つ目の目的として日経 225 株価指数オプションに対して観察されたボラティリティ・スキュー現象が，S&P500 株価指数オプション同様，将来の株価のジャンプ・リスクによってもたらされているといえるかどうか実証的な観点から分析を行う．具体的には，2002 年 2 月から日本経済の緩やかな景気拡大が始まったことに注目して，この景気の転換点以前と以後における日経 225 株価指数オプションの比較分析を行う．転換前ではオプション市場参加者が予測する将来の株価収益率分布は転換後の場合の分布よりも急尖的で，左右非対称な分布をしているであろう．表 1 から分かるように実際の株価の収益率分布をみても 2002 年以前は非正規性が強かったが，それ以降の収益率分布はむしろ正規分布にかなり近いものであった．このことから転換前と転換後の期間を比較分析することによって収益率分布の影響がオプション価格にどのように反映されているか考察することが可能となろう．

2 つ目の分析目的はブラック・ショールズモデルから幾何レヴィ過程モデルに拡張した場合のパフォーマンス評価を行うことである．第 4 章の分析からすでに明らかなように幾何レヴィ過程モデルはブラック・ショールズモデルよりもオプション価格に対して当てはまりのよいモデルである．そこで，ここでは特にオプション価格の予測性という観点からの比較分析を行う．

本章の構成は次のようになっている．まず本節は序論として本章の分析の目的について述べた．続く 5.2 節では分析に用いるモデルについて述べ，5.3 節では分析に使用したデータについて述べる．5.4 節では，ボラティリティ・スキューの観点から日経 225 株価指数オプションに対して実証分析を行った結果について述べる．5.5 節で本章の分析のまとめを行い，今後の課題について述べる．

5.2 モデルについて

本章では幾何レヴィ過程モデルにもとづいて実証分析を行うことにした．これは，幾何レヴィ過程モデルがリスク中立密度関数の急尖的で，左右非対称な特徴を説明できるモデルで

ある（つまり，幾何レヴィ過程モデルはボラティリティ・スマイル/スキュー現象を説明できるモデルである）ことによるものである．また，パラメータの推定はカリブレーション問題を解くことによって行うこととした．これは，オプション市場参加者が予想している将来の株価収益率分布を推定することは，過去の実際の収益率データを使って行うよりも，むしろ，カリブレーション問題を解いたほうがよりその目的を達成できるであろうからである．

第4章の分析では，MEMM に基づいた幾何レヴィ過程モデルとその他の同値マルチンゲール測度に基づいた幾何レヴィ過程モデルとをボラティリティ・スキューの再現性という観点から比較したが，ほとんど差はみられなかった．そして，ボラティリティ・スキューの再現性という観点からは主に幾何レヴィ過程としてどのプロセスを選択するかがより重要であった．そこで，幾何レヴィ過程モデルとしては MEMM にこだわらず各プロセスに対して数値計算の行いやすい同値マルチンゲール測度を選択した．

本章では幾何レヴィ過程モデルとして，[G-VG & ESMM] モデル及び [G-NIG & ESMM] モデル，[G-Stable & MEMM] モデル，[Merton & MCMM] モデル，Carr and Wu (2003) の FMLS モデルに注目した．幾何 VG 過程及び幾何 NIG 過程に関しては，ESMM で測度変換した場合のリスク中立過程はそれぞれ幾何 VG 過程と幾何 NIG 過程に従うことから，測度変換後の特性関数の関数形が陽にわかっており，オプション価格の数値計算が行いやすい．よって，これらのモデルの場合には ESMM を採用した．幾何安定過程の場合には，適用できる同値マルチンゲール測度の候補は MEMM だけである．[Merton & MCMM] モデルは Merton (1976) の公式によってオプション価格を容易に計算することが可能である．また，この場合には他の同値マルチンゲール測度を用いた場合よりパラメータ数が1つ少なくなるが，再現性には影響しなかった．よって，Merton のジャンプ拡散過程の場合には同値マルチンゲール測度として MCMM を採用した．

5.3 データについて

本章では，大阪証券取引所で取引された日経 225 株価指数オプションを分析対象とし，特にヨーロッパ型コールオプションについて分析を行った．分析期間は 1999 年 1 月 4 日から 2000 年 12 月 29 日の 2 年間と 2003 年 1 月 6 日から 2004 年 12 月 30 日の 2 年間の 2 つの期間とした．

カリブレーション問題の性格上，ノイズが多く含まれているデータがあると推定結果が不安定になってしまう．そのため，ここでは次に該当するデータは除外している．まず，ヨー

ロップ型オプションの理論的な上限・下限値：

$$\text{コール・オプション価格 } c : \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \leq c \leq S_0$$

から外れたオプションは異常値として分析の対象から除外した。また、残存期間（営業日ベース）が5日以下のデータ及び取引高が5以下のデータも除外した。これら2種類のデータは、いずれも流動性などの影響でノイズを含みやすいデータである。ここで、表12、13はそれぞれの期間におけるオプション価格の平均（標準偏差）をまとめたものである。

オプションの残存期間については満期日までの日数を暦日か営業日のどちらに基づいて計算すべきか議論のあるところであるが、ここでは、営業日ベースの残存期間を用いている。これは、3.3.1節において述べたのと同様の理由による。

オプション価格を評価する際に用いる日経225の終値は、先物価格の公式：

$$F_t(T_F) = S_t e^{r(T_F - t)}, \quad F_t(T_F) : \text{futures price expiring in } T_F \text{ at time } t.$$

に日経225先物の終値を代入して推計した値を用いた。ここで、日経225先物の終値としては、その取引日において最も取引高の大きかったものを使用した。これは、オプション価格を評価する時点と日経225の終値が評価される時点とにタイムラグが存在するため、この影響を調整する目的で行ったものである。実際、オプションの取引時間は午後3時15分までである一方で、原証券である日経225の終値は午後3時時点のものである。したがって、取引終了時点のオプション価格を評価する際の実証価格には必ずしも明らかではない。日々の日経225の変動からするとこの15分というタイムラグは小さなものであるとはいえないであろう。このタイムラグを考慮するために、よく先物価格が用いられているが、これは先物価格の取引終了時点がオプションのそれと同じであることによる。

また、オプション価格を評価する際に用いる安全利子率は、便宜上、残存期間が30日以上60日未満の週次の新発CDレートをを用いている。

5.4 実証分析

5.4.1 分析について

分析期間は、5.1節で述べた分析目的から2002年の頭を基準に前後1年間を空けて、1999年1月4日から2000年12月29日の2年間と2003年1月6日から2004年12月30日の2年間とした。

表 12 日経 225 のコールオプション価格の平均値 (標準偏差): 1999 年 1 月 4 日から 2000 年 12 月 29 日

	$M < 0.85$	$0.85 \leq M < 0.95$	$0.95 \leq M < 1.00$	$1.00 \leq M < 1.05$	$1.05 \leq M < 1.15$	$M \geq 1.15$
$5 \leq T < 25$ { サンプル数 }	3157 (652.3) { 53 }	1540 (471.7) { 562 }	643.4 (194.1) { 727 }	208.9 (108.4) { 802 }	39.52 (37.25) { 982 }	4.880 (3.883) { 199 }
$25 \leq T < 50$ { サンプル数 }	2837 (423.4) { 36 }	1644 (422.2) { 630 }	816.7 (180.0) { 737 }	402.1 (125.8) { 1009 }	134.0 (77.69) { 1241 }	19.89 (15.18) { 273 }
$50 \leq T < 75$ { サンプル数 }	2502 (239.2) { 5 }	1640 (327.6) { 357 }	973.2 (188.2) { 467 }	572.6 (131.3) { 805 }	264.9 (109.2) { 949 }	71.16 (45.47) { 123 }
$T \geq 75$ { サンプル数 }	2852 (248.0) { 5 }	1635 (282.5) { 64 }	1048 (186.7) { 139 }	694.0 (155.5) { 270 }	415.3 (165.4) { 254 }	200.9 (119.8) { 38 }

表 13 日経 225 のコールオプション価格の平均値 (標準偏差): 2003 年 1 月 6 日から 2004 年 12 月 30 日

	$M < 0.85$	$0.85 \leq M < 0.95$	$0.95 \leq M < 1.00$	$1.00 \leq M < 1.05$	$1.05 \leq M < 1.15$	$M \geq 1.15$
$5 \leq T < 25$ { サンプル数 }	2685 (796.8) { 110 }	841.6 (256.1) { 276 }	383.5 (121.0) { 453 }	125.3 (70.98) { 466 }	20.10 (24.61) { 904 }	2.375 (2.496) { 467 }
$25 \leq T < 50$ { サンプル数 }	2819 (1311) { 45 }	879.7 (218.6) { 232 }	477.6 (120.2) { 459 }	240.2 (86.96) { 604 }	69.98 (52.11) { 1234 }	9.840 (10.92) { 1201 }
$50 \leq T < 75$ { サンプル数 }	2703 (1147) { 24 }	959.0 (222.3) { 91 }	541.7 (115.4) { 189 }	311.9 (86.88) { 383 }	121.6 (65.89) { 1004 }	24.45 (21.76) { 1070 }
$T \geq 75$ { サンプル数 }	2243 (575.4) { 11 }	1101 (227.6) { 79 }	674.0 (166.1) { 115 }	445.4 (147.9) { 263 }	218.2 (119.8) { 821 }	76.65 (71.42) { 1091 }

$M := K/S$, K : 行使価格, S : 原資産価格

T : 残存期間 (営業日)

分析は1週間単位で行っている。これは、一般に株価の変動には曜日効果が存在することから、この影響を除外することを目的としている。また、1日単位でパラメータの推定を行った場合よりも推定されるパラメータ値が安定していたことも分析単位を1週間とした理由の1つである。

パラメータの推定は

$$\text{SSE}(\Theta_t) := \sum_{i=1}^{n(t)} |p_t(K_i, T_i) - \eta(\Theta_t, K_i, T_i)|^2 \rightarrow \min \quad (5.1)$$

なる Θ を数値解析的に解くことによって行っている。ここに、 p はコール・オプションの市場価格を表すものとし、また η はコール・オプションの理論価格を表すものとする。 $n(t)$ は期間 t におけるオプションの数を表すものとする。

誤差の尺度としては Average Relative Percentage Error (ARPE) と Root-Mean-Square Error (RMSE) を用いた。それぞれの定義は次の通りである：

$$\text{ARPE} := \frac{1}{\sum_{t=1}^N n(t)} \left(\sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^{n(t)} \frac{|p_{ti} - \eta_i(\Theta_t)|}{p_{ti}} \right),$$

$$\text{RMSE} := \sqrt{\frac{1}{\sum_{t=1}^N n(t)} \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^{n(t)} |p_{ti} - \eta_i(\Theta_t)|^2}.$$

ここで、1999年1月4日から2000年12月29日の場合には $N = 104$, $\sum_{t=1}^N n(t) = 10727$ 、2003年1月6日から2004年12月30日の場合には $N = 104$, $\sum_{t=1}^N n(t) = 11592$ であった。

5.4.2 インサンプル分析

本節では、インサンプル分析の結果について述べる。1999年1月4日から2000年12月29日の2年間と2003年1月6日から2004年12月30日の2年間のそれぞれの期間において1週間単位でカリブレーション問題(5.1)を解き、そのときの当てはまり度合いについて調べた。このときの結果をまとめたものが表14である。この表からわかるように、1999年1月4日から2000年12月29日の期間ではブラック・ショールズモデルに比べ幾何レヴィ過程モデルの方がRMSEベースでみてオプション価格に対する当てはまり度合いが改善していることがわかる。その一方で、2003年1月6日から2004年12月30日の期間では、RMSEベースでみた場合、幾何レヴィ過程モデルの方が僅かに当てはまりがよかったもののブラック・ショールズモデルと幾何レヴィ過程モデルにはほとんど差はみられなかった。

表 14 インサンプル分析の結果

Model	Measure	1999/1/4 ~ 2000/12/29		2003/1/6 ~ 2004/12/30	
		RMSE	ARPE	RMSE	ARPE
Black-Scholes		49.810	0.1229	20.640	0.1804
FMLS		45.469	0.1212	20.430	0.1578
VG Process	ESMM	49.528	0.1238	20.528	0.1602
NIG Process	ESMM	48.676	0.1864	19.931	0.3202
Merton Model	MCMM	44.764	0.1243	19.811	0.1782
Stable Process	MEMM	45.169	0.1267	20.002	0.2284

表 15 パラメータの推定値の平均 (標準偏差): 1999 年 1 月 4 日から 2000 年 12 月 29 日

Model	Measure	Averages of Model Parameter Estimates (Std. dev.)			
Black-Scholes		$\sigma = 0.2262$ (0.0229)			
FMLS		$\alpha = 1.8776,$ (0.0714)		$\sigma = 0.1613$ (0.0170)	
VG Process	ESMM	$b_0 = -0.0004,$ (0.0030)	$C = 104.18,$ (78.889)	$c_1 = 60.510,$ (17.633)	$c_2 = 60.634$ (16.741)
NIG Process	ESMM	$b_0 = -0.0061,$ (0.0399)	$\alpha = 58.063,$ (62.292)	$\beta = 0.4464,$ (1.8049)	$\delta = 3.3203$ (3.7446)
Merton Model	MCMM	$\sigma^2 = 0.0326,$ (0.0164)	$\lambda = 11.881,$ (28.978)	$m = -3.0608,$ (8.0050)	$v = 0.0879$ (0.3257)
Stable Process	MEMM	$b = 0.0195,$ (0.0372)	$\alpha = 1.8985,$ (0.0630)	$c_1 = 0.0055,$ (0.0039)	$c_2 = 9.80E-06$ (3.64E-05)

表 16 パラメータの推定値の平均 (標準偏差): 2003 年 1 月 6 日から 2004 年 12 月 30 日

Model	Measure	Averages of Model Parameter Estimates (Std. dev.)			
Black-Scholes		$\sigma = 0.2148$ (0.0277)			
FMLS		$\alpha = 1.9585,$ (0.0456)		$\sigma = 0.1521$ (0.0197)	
VG Process	ESMM	$b_0 = 0.0115,$ (0.1140)	$C = 258.37,$ (222.58)	$c_1 = 97.540,$ (36.180)	$c_2 = 98.652$ (38.079)
NIG Process	ESMM	$b_0 = -0.0052,$ (0.0256)	$\alpha = 46.376,$ (45.542)	$\beta = 0.7577,$ (1.9083)	$\delta = 2.2670$ (3.1451)
Merton Model	MCMM	$\sigma^2 = 0.0342,$ (0.0151)	$\lambda = 11.758,$ (17.409)	$m = -3.0473,$ (8.6496)	$v = 0.0355$ (0.3028)
Stable Process	MEMM	$b = 0.0006,$ (0.0225)	$\alpha = 1.9710,$ (0.0388)	$c_1 = 0.0009,$ (0.0014)	$c_2 = 0.0005$ (0.0012)

表 15, 16 は, 各モデルに対してカリブレーション問題 (5.1) を解くことで得られたパラメータ値の平均と標準偏差をまとめたものである. Merton モデルの場合の結果をみると大きなジャンプが高頻度で発生するようなパラメータ値が推定されているように見える. しかし実際には, 程度の差はあるものの, $\sigma^2 = 0.013, \lambda = 43.63, m = -0.007, v = 0.0008$ のような高頻度で小さなジャンプが発生する場合と $\sigma^2 = 0.043, \lambda = 0.005, m = -8.902, v = 6.7e-10$ のような低頻度で大きなジャンプが発生する場合とが混在したものであった. 大きなジャンプが高頻度で発生するようなパラメータ値は推定されていない.

いま, 各モデル間の当てはまり度合いに有意な差があるといえるかどうか調べるために母分散が未知の場合の 2 標本平均の差の検定である Welch の検定 (有意水準 5%) を行った. モデル k の標本データを $\text{RMSE}_t^{(k)}, t = 1, \dots, N$:

$$\text{RMSE}_t^{(k)} := \sqrt{\frac{1}{n(t)} \sum_{i=1}^{n(t)} |p_{ti} - \eta_i(\Theta_t)|^2}, \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

とし, $\overline{\text{RMSE}}^{(k_i)} - \overline{\text{RMSE}}^{(k_j)}$ に有意な差がみられるかどうか検定を行うことにした. ここで, Welch の検定では母集団は正規分布に従うことが前提となっている. 各モデルに対して標本データ $\{\text{RMSE}_t^{(k)}, t = 1, \dots, N\}$ の正規性の検定を行ったところすべての場合で正規性は棄却された. これは, $\text{RMSE}_t \geq 0$ であるから当然の結果ともいえる. そこで, $\log(\text{RMSE}_t^{(k)}), t = 1, \dots, N$ として正規性の検定を行ったところすべての場合で正規性が採択された. このことから, 標本データを $\{\log(\text{RMSE}_t^{(k)}), t = 1, \dots, N\}$ として Welch の検定を行った. 表 17, 18 はその結果をまとめたものである. 1999 年 1 月 4 日から 2000 年 12 月 29 日では, ブラック・ショールズモデルよりも幾何レヴィ過程モデルの方が RMSE ベースで当てはまりがよかったが, その中でも特に FMLS モデル, Merton モデル, [G-Stable & MEMM] モデルの 3 つのモデルはブラック・ショールズモデルと比較して統計的に有意な差がみられた. 一方, [G-VG & ESMM] モデルと [G-NIG & ESMM] モデルは統計的にはブラック・ショールズモデルと有意な差があるとはいえなかった. このように FMLS モデルなどの当てはまりが良い一方で幾何 VG 過程モデルや幾何 NIG 過程モデルの当てはまりがそれほど良くないという傾向はボラティリティ・スキューが観察されるオプション市場においてみられる (例えば Carr and Wu (2003) など). 2003 年 1 月 6 日から 2004 年 12 月 30 日では, ブラック・ショールズモデルと幾何レヴィ過程モデル間にオプション価格の当てはまり度合いについて有意な差はみられなかった.

表 17 2 標本平均の差の検定, t-値 ($t_{(0.025)}$): 1999 年 1 月 4 日から 2000 年 12 月 29 日

	BS	FMLS	VG	NIG	Merton
FMLS	2.6328 (1.9716)				
VG	0.11485 (1.9716)	2.5492 (1.9716)			
NIG	0.0184 (1.9715)	2.6102 (1.9716)	0.0961 (1.9716)		
Merton	2.9596 (1.9716)	0.3273 (1.9715)	2.8797 (1.9716)	2.9365 (1.9716)	
Stable	2.6694 (1.9715)	0.0300 (1.9715)	2.586 (1.9715)	2.6466 (1.9715)	0.2980 (1.9715)

表 18 2 標本平均の差の検定, t-値 ($t_{(0.025)}$): 2003 年 1 月 6 日から 2004 年 12 月 30 日

	BS	FMLS	VG	NIG	Merton
FMLS	0.4374 (1.9716)				
VG	0.08903 (1.9715)	0.3510 (1.9716)			
NIG	0.6311 (1.9715)	0.1745 (1.9716)	0.5419 (1.9715)		
Merton	0.70407 (1.9716)	0.2567 (1.9715)	0.6171 (1.9716)	0.0891 (1.9716)	
Stable	0.6509 (1.9716)	0.2070 (1.9715)	0.5644 (1.9716)	0.0386 (1.9716)	0.0489 (1.9715)

5.4.3 アウトサンプル分析

本節では、アウトサンプル分析の結果について述べる。ここでも、1999年1月4日から2000年12月29日の2年間と2003年1月6日から2004年12月30日の2年間のそれぞれの期間を分析期間とした。そして、1週間単位でカリブレーション問題(5.1)を解いて得られたパラメータ値を用いて次の週のオプション価格を予測した場合のパフォーマンス評価を行った。この結果をまとめたものが表19である。

この表からは、1999年1月4日から2000年12月29日では幾何レヴィ過程モデルの方がブラック・ショールズモデルよりも若干だがパフォーマンスが上回っていたことが分かる。その中でもFMLSモデルと[G-Stable & MEMM]モデルは特に予測精度が高かった。また、2003年1月6日から2004年12月30日ではブラックショールズモデルと幾何レヴィ過程モデルにはあまり差はなかったといえる。むしろ、ブラック・ショールズモデルよりも予測精度の悪いモデルもあった。

結果としては幾何レヴィ過程モデルは予測性という点ではブラック・ショールズモデルとそれ程差はなかったといえる。

表19 アウトサンプル分析の結果

Model	Measure	1999/1/4 ~ 2000/12/29		2003/1/6 ~ 2004/12/30	
		ARPE	RMSE	ARPE	RMSE
Black-Scholes		0.1567	61.767	0.2205	25.107
FMLS		0.1510	60.346	0.1975	25.537
VG Process	ESMM	0.1568	61.488	0.2085	25.042
NIG Process	ESMM	0.2227	61.673	0.3567	24.592
Merton Model	MCMM	0.1531	61.530	0.2135	25.222
Stable Process	MEMM	0.1590	60.200	0.3235	25.615

5.4.4 分析結果についての考察

本章の分析目的の1つ目は、オプション価格に将来の株価のジャンプ・リスク(予想収益率分布の非正規性)が反映されているかどうか調べることであった。オプションというのは将来の株価変動リスクに対する保険的商品であったことから、予想される株価収益率分布が正規分布よりも急尖的な特徴を持っていたり、あるいは、左右非対称な分布であった場合にはその影響は明確にオプション価格に反映されるであろう。もし、実際のオプショ

ン価格に収益率分布の非正規性に対するプレミアムが含まれているとすれば、これは、収益率分布の正規性を前提とするブラック・ショールズモデルから収益率分布の非正規性を説明できるモデルである幾何レヴィ過程モデルへ拡張することに対する実証的な根拠となる。

本章では 2002 年 2 月以降の緩やかな景気拡大という転換点に注目した。転換前では景況の先行きの不安定さからオプション市場参加者が予測する将来の株価収益率分布は転換後の場合の分布よりも急尖的で、左右非対称な分布をしているであろう。また、緩やかな景気拡大ということで転換後の期間は比較的安定した印象を与える。したがって、この期間において予測される収益率分布は正規分布に近いものとなろう。それゆえ、これらの期間を比較分析することによってオプション市場参加者の将来に対する予想がオプション価格にどのように反映されているのかみることが可能となる。実際に分析を行ったところ、転換前の先行きの不安定な状況下ではブラック・ショールズモデルよりも幾何レヴィ過程モデルの方が当てはまりが良かった。その一方で、転換後の緩やかな景気拡大という比較的安定した状況下では、ブラック・ショールズモデルと幾何レヴィ過程モデルにはほとんど差はみられなかった。

正規性が強いと考えられる期間ではブラック・ショールズモデルとほとんど差がみられない一方で、非正規性が強いと考えられる期間では幾何レヴィ過程モデルの方が当てはまりが良いという結果は、オプション価格に将来の予想収益率分布の非正規性の影響が反映されている可能性があることを示すものである。

以上の考察から、ブラック・ショールズモデルから幾何レヴィ過程モデルに拡張する実証的な根拠が得られたといえる。では、幾何レヴィ過程モデルに拡張することでオプション価格の予測性は向上するであろうか。この観点からの分析を行うことが本章の 2 つ目の目的である。

インサンプル分析の結果から FMLS モデル、Merton モデル、[G-Stable & MEMM] モデルが重要なモデルである可能性が高いといえる。実際、転換点以前では幾何レヴィ過程モデルの中でも特に FMLS モデル、Merton モデル、[G-Stable & MEMM] モデルはブラック・ショールズモデルと比較して有意な差があった。ただし、FMLS モデル、Merton モデル、[G-Stable & MEMM] モデルを比較した場合には、各モデル間に有意な差はみられなかった。とはいえ、FMLS モデルは 2 パラメータモデルであるにもかかわらず良いパフォーマンスを示していたといえる。したがってパラメータ数という観点からは FMLS モデルが 1 番良いモデルであったと結論できるであろう。しかしながら、FMLS モデルはボラティリ

ティ・スマイルを説明することはできない。オプションのインプライド・ボラティリティの特徴は常にボラティリティ・スキューの傾向が強いわけではなく、ボラティリティ・スマイルの傾向が強い場合もある。ボラティリティ・スマイルも説明できるという点を重視すれば、モデルの候補は Merton モデルと [G-Stable & MEMM] モデルになるであろう。いずれにしても、これら 3 つのモデルが良いモデルの候補といえる。しかし、実際にアウトサンプル分析を行ったところ、これら 3 つのモデルを含め幾何レヴィ過程モデルとブラック・ショールズモデルにはほとんど差はみられなかった。

5.5 まとめと今後の課題

本章での分析から、収益率分布の非正規性の影響がオプション価格に反映されている可能性があることがわかった。この結果は、ブラック・ショールズモデルから幾何レヴィ過程モデルに拡張することへの実証的な根拠となるものである。ただし、幾何レヴィ過程モデルに拡張した場合でも、説明されない誤差は多く残っている。特に、予測性という点ではブラック・ショールズモデルとそれ程差はなかった。

つまり、日経 225 株価指数オプションの評価誤差は収益率分布の非正規性以外の影響が大きいといえる。したがって、今後の課題として日経 225 株価指数オプションの評価誤差の主な原因を探求する。

また、日経 225 株価指数オプションは原証券がインデックスであるため、収益率分布の非正規性は必ずしも強く意識されない可能性がある。幾何レヴィ過程モデルに対して実証的な評価を与えるためには、収益率分布の非正規性の影響が強く意識されるようなオプションに対しても同様な実証分析を行うことが重要である。そして、その対象としては通貨オプションが考えられる。それは、外国為替の変動は株価指数に比べると日々激しく変動しており、一般に外国為替の変化率の分布は急尖的な特徴を持っていることがよく知られているからである。そこで、次章では通貨オプションに対して同様の分析を行った。

6 OTC の通貨オプションに対する分析

6.1 序論

前章までの分析によってわかったように、オプション価格にはオプション市場参加者が予測する原資産の収益率分布の非正規性の影響がプレミアムという形で反映されている可能性が高い。ただし、日経 225 株価指数は、複数の株価を組み合わせたインデックスであるという性格上、必ずしもオプション価格に与える収益率分布の非正規性の影響は大きいものではないといえるだろう。実際、第 3 章の分析でも、第 5 章の分析においても、株価の収益率分布の非正規性の影響が強い区間では、そうでない区間に対してブラック・ショールズモデルよりもオプション評価誤差に改善は見られたものの、改善幅はそれほど大きいものではなかった。本章では、通貨オプションを分析対象とする。外国為替の変動は株価指数に比べると日々激しく変動しており、一般に外国為替の変化率の分布は急尖的な特徴を持っていることがよく知られている。このように通貨オプションの場合であれば、株価指数のオプションの場合よりも収益率分布の非正規性の影響がよりおおきなウェイトを占めているであろう。

第 4 章での分析からもわかるように [GLP & MEMM] モデルのなかでは特に [G-Stable & MEMM] モデルが重要なモデルである可能性が高かった。そこで、[GLP & MEMM] モデルとして特に [G-Stable & MEMM] モデルに注目して分析を行った。

安定分布が古くから注目されていたにもかかわらず、幾何安定過程に基づいたオプション評価モデルの構築は従来は必ずしも成功はしていなかったといえる。それは、安定分布は高次のモーメントを持たないために他ならない。しかしながら、Miyahara (2001) で導入された [GLP & MEMM] モデルのフレームワークを用いることによって幾何安定過程に基づいたオプション評価モデルを構築することが可能であることが分かっている (Miyahara (2006) を参照)。幾何安定過程に基づいたオプション評価モデルとしては Carr and Wu (2003) による Finite Moment Log Stable (FMLS) モデルがよく知られているが、このモデルは $c_2 = 0$ の特殊なケースに限定されていた。それゆえ、本章における [G-Stable & MEMM] モデルに対する実証分析は、単に [GLP & MEMM] モデルに対する実証分析という観点からだけでなく、幾何安定過程に基づいたオプション評価モデルに対する実証分析という観点からも意味のあるものであると考える。

また、[G-Stable & MEMM] モデルと比較分析を行うモデルとしては、以下に述べるも

のに注目した。まず，幾何安定過程モデルとパラメータ数の同じモデルであることから幾何 VG 過程モデル，幾何 NIG 過程モデル，Merton (1976) のジャンプ拡散過程モデルに注目した。また，収益率分布の分析では，scaled t-分布と安定分布とは比較して分析されることが多いようである。そして，場合によっては安定分布よりも scaled t-分布の方が現実の収益率分布に対して当てはまりがよい場合もあることが指摘されている（例えば，Praetz (1972)）。そこで，scaled t-分布モデルも比較対象とした。幾何安定過程モデルとしては，[G-Stable & MEMM] モデル以外に，Carr and Wu (2003) による Finite Moment Log Stable (FMLS) モデルが知られている。このモデルは， $c_2 = 0$ の特殊なケースの場合におけるオプション評価モデルである。

6.2 通貨オプションの場合のオプション価格モデル

Garman-Kohlhagen Model

Garman and Kohlhagen (1983) によるヨーロッパ型通貨オプションの価格公式（通貨オプションの場合のブラック・ショールズの公式）は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \text{BS}_{\text{Call}} &= e^{-r_f T} S N(d_+) - e^{-r_d T} N(d_-), \\ \text{BS}_{\text{Put}} &= -e^{-r_f T} S N(-d_+) + e^{-r_d T} N(-d_-), \\ d_{\pm} &= \frac{\log(F/K)}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}, \\ F &= S e^{r_d - r_f T}, \\ N(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt. \end{aligned} \tag{6.1}$$

S は，為替のスポット・レートを表すものとする。Garman-Kohlhagen モデルでは S は幾何ブラウン運動に従うものと仮定される。すなわち，スポット・レートの変化率（ $:= \log(S_t) - \log(S_{t-1})$ ）は正規分布に従うと仮定されている。また， r_f ， r_d はそれぞれ外国金利，国内金利を表すものとする。 T は残存期間であり， K は行使レートである。

[GLP & MEMM] Models

Miyahara Miyahara (2001) による [GLP & MEMM] モデルでは，原資産過程 S_t は幾何レヴィ過程に従い，通貨オプション価格 X は $e^{-(r_d - r_f)T} E_{P^*}[X]$ により定まるとされる。ここに， P^* は Minimal Entropy Martingale Measure (MEMM) である（MEMM については Miyahara Miyahara (1999)）。また r_d ， r_f はそれぞれ国内金利，外国金利を表すも

のとする．ここで，幾何レヴィ過程 S_t とは，確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 及びフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ が与えられた下で，

$$S_t = S_0 e^{Z_t}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

なる形で与えられる．ここに Z_t は生成要素 $(\sigma^2, \nu(dx), b)$ を持つレヴィ過程である．

[G-Stable & MEMM] モデルの特徴

Miyahara and Moriwaki (2006) におけるシミュレーション分析の結果として，[G-Stable & MEMM] モデルは様々なバリエーションのボラティリティ・スマイル/スキューを示すことが分かっている．FMLS モデルは $c_2 = 0$ の特殊な場合におけるモデルであることから，負の傾きの場合のボラティリティ・スキューしか再現しない．しかし，[G-Stable & MEMM] モデルの場合には正の傾きの場合のボラティリティ・スキューも再現でき，また，ボラティリティ・スマイルも再現できる (図 24)．

また， $\alpha = 2$ の場合には安定分布は正規分布に従う．それゆえ， $\alpha \rightarrow 2$ の場合には [G-Stable & MEMM] モデルは漸近的にブラック・ショールズモデルに近づくであろう．このことは，図 25 から分かる．

さらに，[G-Stable & MEMM] モデルはボラティリティ・スマイルとボラティリティ・スキュー両方の特徴を説明できるモデルであったのに対して [G-Stable & MEMM] モデルとパラメータ数の同じモデルである [G-VG & MEMM] モデルと [G-NIG & MEMM] モデルは残存期間が短期の場合にはボラティリティ・スキューを必ずしも説明できるわけではないということが分かっていた．

結果として，[G-Stable & MEMM] モデルはボラティリティ・スマイル/スキューに対して高い再現性を持ったモデルであるといえる．

6.3 データについて

6.2 節で指摘したように，[G-Stable & MEMM] モデルは，様々なバリエーションのボラティリティ・スマイル/スキューの特徴を示した．それゆえに，[G-Stable & MEMM] モデルはボラティリティ・スマイル/スキューが観察されるオプションを分析するためのモデルとして有用である可能性が高い．さて，図 26 は通貨オプションのインプライド・ボラティリティをプロットした図である．

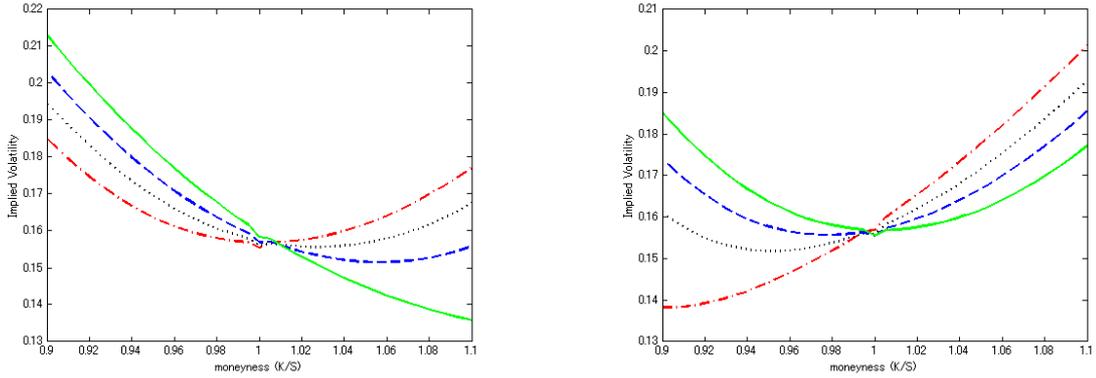


図 24 m

odel]Volatility smile/smirk properties of the [G-Stable & MEMM] model. $b = 0$, $\alpha = 1.7$ and $r_d = r_f = 0$, $S = 1$, $T = 0.25$. Left Figure : dash-dot line ($c_1 = 0.005, c_2 = 0.005$), dotted line ($c_1 = 0.0065, c_2 = 0.0035$), dashed line ($c_1 = 0.008, c_2 = 0.002$), solid line ($c_1 = 0.01, c_2 = 1.0e - 11$). Right Figure : dash-dot line ($c_1 = 1.0e - 11, c_2 = 0.01$), dotted line ($c_1 = 0.002, c_2 = 0.008$), dashed line ($c_1 = 0.0035, c_2 = 0.0065$), solid line ($c_1 = 0.005, c_2 = 0.005$).

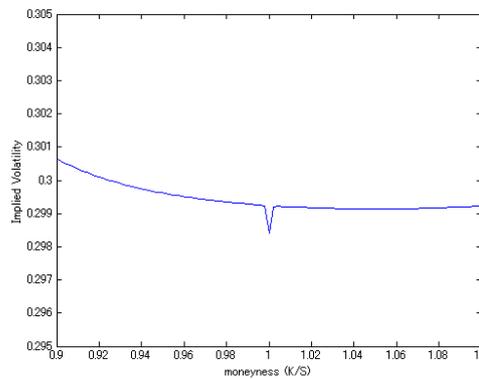
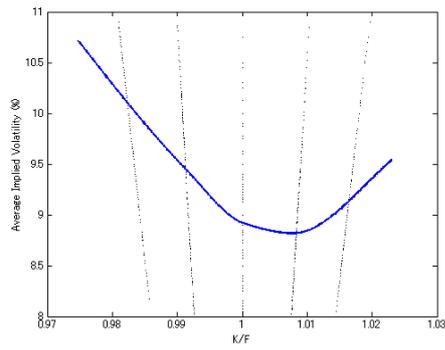
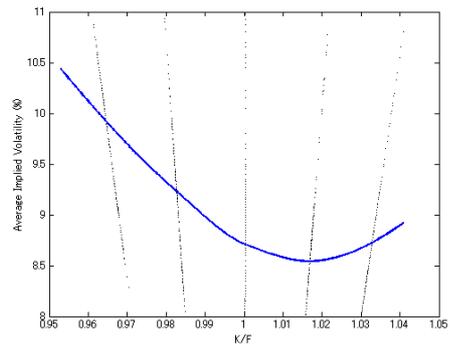


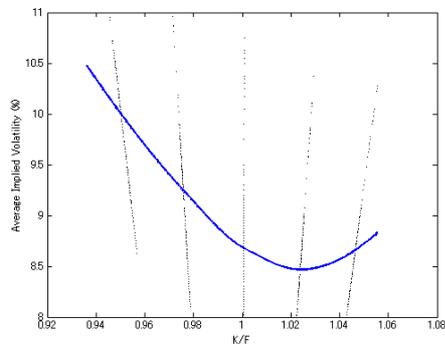
図 25 平均 0, 分散 $(0.3)^2$ の正規分布に従う乱数を 5000 個生成させ, この正規乱数を用いて安定分布のパラメータを最尤法によって推定した. 安定分布の尤度は, 安定分布の特性関数 (2.8) を利用して数値解析的に計算した. このときの推定値は $b = 1.6219E-5, \alpha = 1.9977, c_1 = 1.0605E-4, c_2 = 9.9591E-5$ であった. このパラメータ値を用いて [G-Stable & MEMM] モデルでのオプション価格を計算し, そのときのインプライド・ボラティリティをプロットしたものがこの図である. ここでその他のパラメータの値は $S = 1, r_d = r_f = 0, T = 0.1$ としている. この図からわかるように, インプライド・ボラティリティの値はほぼ 0.3 となり, ブラック・ショールズモデルの場合に非常に近い結果となった.



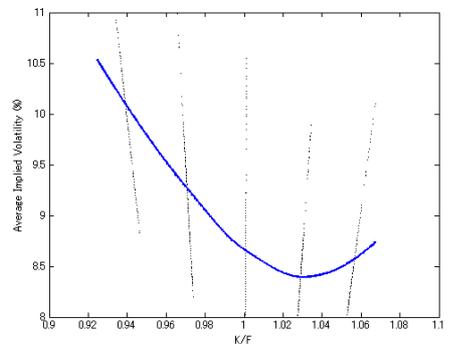
(a) 残存期間が 1 週間の場合



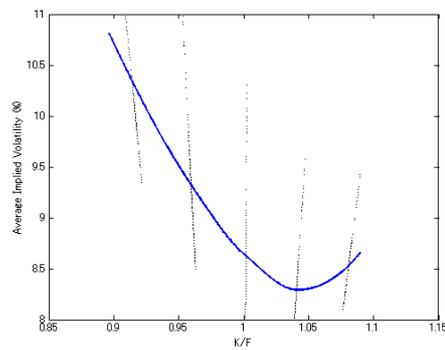
(b) 残存期間が 1 ヶ月間の場合



(c) 残存期間が 2 ヶ月間の場合



(d) 残存期間が 3 ヶ月間の場合



(e) 残存期間が 6 ヶ月間の場合

図 26 2005 年 9 月 5 日から 2006 年 9 月 4 日の間に取引された通貨オプションの建値ボラティリティの平均値をプロットした図。ここで、任意の K/F での建値ボラティリティの値は 3 次のスプライン補間によって計算している。そうして得られた各ポイントでの建値ボラティリティの平均値をプロットしている。

この図からもわかるように、通貨オプションはボラティリティ・スマイル/スキューという特徴を持っている。特に、残存期間が1週間の場合にはボラティリティ・スマイルの傾向が強くなり、それ以外の残存期間ではボラティリティ・スキューの傾向が強かった。そこで、本章では通貨オプションを分析対象とした。

ここで我々が分析の対象とするデータは、インターバンク市場で取引されているヨーロッパ型のドル円通貨オプションである。外国為替取引の規模が膨大なものであるということはいうまでもないが、それに付随する形で通貨オプションも盛んに取引されており、その規模は近年増大している(1日あたりの平均的な取引高は、日本では2001年に54億ドルであったものが2004年では74億ドルに、また、グローバル・ベースでは600億ドルから1170億ドルに増大している²⁰⁾)。それゆえに通貨オプションに関する実証分析は重要な研究課題といえる。通貨オプションの取引は銀行間による相対取引がその多くを占め、オプションは主にヨーロッパ型が取引されている。本章では分析対象として2005年9月5日から2006年9月4日に取引されたデータを使用する。ここに、このデータはりそな銀行のご好意により提供して頂いた。

通貨オプションは、株価指数オプションなどと異なり、ブラック・ショールズモデルに基づくインプライド・ボラティリティによって建値されている。それゆえ、通貨オプションの価格自体は建値ボラティリティをブラック・ショールズモデルに代入することで得られる。また、通貨オプションは、行使価格それ自体ではなく、ブラック・ショールズモデルのデルタによって認識されている。すなわち、ストラドル0デルタ(アット・ザ・マネー)、プット10デルタ(ディープ・イン・ザ・マネー)、プット25デルタ(イン・ザ・マネー)、コール25デルタ(アウト・オブ・ザ・マネー)、コール10デルタ(ディープ・アウト・オブ・ザ・マネー)の5つである。また、

$$\text{CALL Delta} = \exp(-\text{Foreign Rate} \times \text{Time to Maturity}) - \text{PUT Delta}$$

が成り立っている。Call Deltaが50%のときにほぼATMの状態になる。Call Deltaは原資産に関する増大関数であったから、Call Deltaが50%より大きくなるほど、そのオプションはITMの状態になる。逆に、50%より小さくなるほど、そのオプションはOTMの状態になる。実際に取引されている通貨オプションはそのほとんどが残存期間1年未満のオプションである。そこで、本章では分析対象を残存期間1年未満のオプションに限定した。この場合の残存期間の種類としては1週間(1W)、1ヶ月間(1M)、2ヶ月間(2M)、3ヶ月

間 (3M), 6 ヶ月間 (6M) の 5 つがある . 表 20 は , 通貨オプションの建値の一例である .
ここで

$$\text{PUT } 10\Delta = \text{Straddle } 0\Delta + \text{Strangle } 10\Delta - 0.5 \text{ Risk Reversal (Call) } 10\Delta$$

$$\text{PUT } 25\Delta = \text{Straddle } 0\Delta + \text{Strangle } 25\Delta - 0.5 \text{ Risk Reversal (Call) } 25\Delta$$

$$\text{CALL } 10\Delta = \text{Straddle } 0\Delta + \text{Strangle } 10\Delta + 0.5 \text{ Risk Reversal (Call) } 10\Delta$$

$$\text{CALL } 25\Delta = \text{Straddle } 0\Delta + \text{Strangle } 25\Delta + 0.5 \text{ Risk Reversal (Call) } 25\Delta$$

と計算される . この場合のボラティリティをプロットしたものが図 27 である .

そして , 建値ボラティリティを (6.1) 式に代入することによって通貨オプション価格を求めることができる . 表 21 は 2005 年 9 月 5 日から 2006 年 9 月 4 日の期間におけるドル円のコールオプション価格の平均値 (標準偏差) を計算したものである .

表 20 通貨オプションの建値の例

Date	Time to Maturity	Straddle	Strangle		Risk Reversal (Call)	
		Delta 0	Delta 10	Delta 25	Delta 10	Delta 25
2005/9/5	1 Week	8.500	0.750	0.225	-0.850	-0.500
	1 Month	8.450	0.600	0.200	-1.275	-0.750
	2 Month	8.450	0.650	0.200	-1.360	-0.800
	3 Month	8.375	0.700	0.200	-1.555	-0.900
	6 Month	8.325	0.900	0.200	-1.750	-1.000

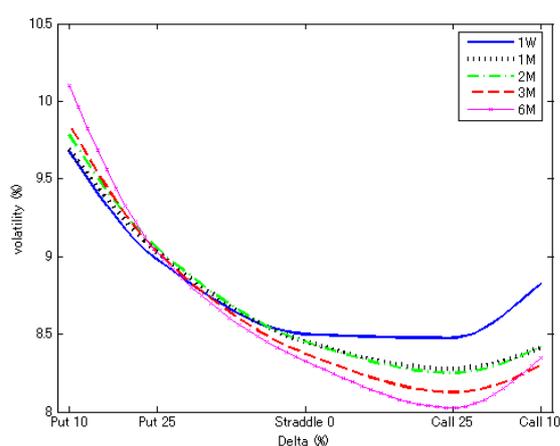


図 27 2005 年 9 月 5 日において建値された通貨オプションのボラティリティ・カーブ

表 21 2005 年 9 月 5 日から 2006 年 9 月 4 日の期間におけるドル円のコールオプション価格の平均値 (標準偏差)

	Call 90	Call 75	Call 50	Call 25	Call 10
1W	2.1101 (0.2332)	1.2312 (0.1477)	0.5650 (0.0658)	0.2093 (0.0225)	0.0688 (0.0069)
1M	4.2370 (0.3727)	2.4586 (0.2038)	1.1326 (0.0866)	0.4186 (0.0281)	0.1360 (0.0085)
2M	5.9479 (0.4524)	3.4389 (0.2452)	1.5830 (0.1014)	0.5853 (0.0316)	0.1905 (0.0096)
3M	7.2588 (0.4951)	4.1730 (0.2665)	1.9191 (0.1085)	0.7098 (0.0336)	0.2308 (0.0107)
6M	10.173 (0.5845)	5.7583 (0.3066)	2.6552 (0.1208)	0.9889 (0.0380)	0.3239 (0.0106)

6.4 実証分析

6.4.1 インサンプル分析

本節では、インサンプル分析の結果について述べる。通貨オプションはボラティリティで建値されているが、実務ではオプション評価誤差は価格ベースで評価されることが一般的である。そこで本章では、オプションの評価誤差をコール・オプション価格ベースで評価することにした。また、誤差の尺度としては Average Relative Percentage Error (ARPE) と Root-Mean-Square Error (RMSE) を用いた。それぞれの定義は次の通りである：

$$\text{ARPE} := \frac{1}{\sum_{t=1}^N n(t)} \left(\sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^{n(t)} \frac{|p_{ti} - \eta_i(\Theta_t)|}{p_{ti}} \right),$$

$$\text{RMSE} := \sqrt{\frac{1}{\sum_{t=1}^N n(t)} \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^{n(t)} |p_{ti} - \eta_i(\Theta_t)|^2}.$$

ここに、 p は OTC におけるコール・オプション価格を表すものとし、また η はコール・オプションの理論価格を表すものとする。 $n(t)$ は時点 t におけるオプションの数を表すものとする。我々が対象とした通貨オプションの場合は $n(t) = 25$ である。また、分析期間を 2005 年 9 月 5 日から 2006 年 9 月 4 日としたので $N = 247$ である。

本章では、モデルのパラメータ値は Bakshi *et al.* (1997) において行われていると同様の方法にしたがって推定した。すなわち、

$$\text{SSE}(\Theta_t) := \sum_{i=1}^{n(t)} |p_t(K_i, T_i) - \eta(\Theta_t, K_i, T_i)|^2 \rightarrow \min \quad (6.2)$$

なる Θ を数値解析的に解くことによってパラメータの値を推定した。また、実際に問題を

解くにあたっては MEMM の存在を仮定しパラメータは存在条件を満たす範囲内で動かした。ESMM の場合も同様である。

インサンプル分析の結果をまとめたものが表 22 である。表 22 からわかるようにインサンプルの場合においては [G-Stable & MEMM] モデルが一番当てはまりがよいという結果であった。

FMLS モデルと比較した場合、[G-Stable & MEMM] モデルの方が当てはまりがよいという結果ではあったが、パラメータ数の違いを考慮すれば FMLS モデルは 2 パラメータ・モデルであるにもかかわらずよい当てはまりを示していたといえる。特に、幾何 VG 過程モデルと比較した場合にはむしろ FMLS モデルの方が当てはまりがよかった。このことは、図 26 からわかるように、対象とした通貨オプションはボラティリティ・スキューの傾向がみられることによるものであろう。実際、Carr and Wu (2003) において指摘されているように FMLS モデルは全体的にボラティリティ・スキューの傾向が強いオプションに対しては非常に当てはまりのよいモデルである。そして、幾何 VG 過程モデルよりも FMLS モデルの方が当てはまりがよいという結果は Carr and Wu (2003) における実証結果と一致するものといえる。ただし、[G-Stable & MEMM] モデルの場合には、幾何 VG 過程モデルの場合のように FMLS モデルよりもパフォーマンスが劣るという結果ではなかった点は注目すべき点であろう。

[G-Stable & MEMM] モデルは比較対象としたモデルの中で最も当てはまりのよいモデルではあったが、Merton モデルと比較した場合には意味があるほどに差があるかどうかは判断が難しいであろう。しかしながら、ARPE で比較した場合には Merton モデルは明らかに当てはまりが悪く、その値はブラック・ショールズモデルの場合よりも悪いものであった。ARPE の値が極端に悪くなるということは、Merton モデルではオプション価格の全体的な特徴を捉えることでできていないということの意味する。実際、表 21 からわかるように残存期間が長く、また、イン・ザ・マネーのオプション価格は全体的にみて高い値を取っており、(6.2) を解く場合には一部分に比重が偏ったものになる。それゆえに、Merton モデルはオプション価格が相対的に高いイン・ザ・マネーの部分はよく説明できていた一方で、相対的に価格の低いアウト・オブ・ザ・マネー部分に対しては説明力が弱かったといえる。Merton モデルがアウト・オブ・ザ・マネーのオプションに対して当てはまりがよくないことは Carr and Wu (2003) や Daal and Madan (2003) において指摘されている。我々が対象としたデータの場合には、アウト・オブ・ザ・マネーの程度はそれ程強いものではないた

め RMSE ベースでは Merton モデルと Pure Jump モデルとは大きな差がみられなかったが、ARPE ベースで見るとその傾向が顕著に現れていたといえる。

6.4.2 アウトサンプル分析

本節では、アウトサンプル分析の結果について述べる。分析に用いるデータ期間は 2005 年 9 月 5 日から 2006 年 9 月 4 日までとし、予測は 1 日ごとに行った。また、予測には予測日前日のデータを用いて (6.2) 式を数値解析的に解いて得たパラメータ値を用いた。理論的な観点から言えば、ある程度の期間はパラメータは一定であると仮定すべきであるといえるが、ここではパラメータを毎日推定しなおして翌日の推定を行っている。このようなアプローチは、Bakshi *et al.* (1997) など多くの文献で行われており、この分野では一般的なものであるといえる。

表 23 は、このときの結果をまとめたものである。表 23 からわかるように、アウトサンプルの場合においても [G-Stable & MEMM] モデルが一番よいモデルであるという結果であった。

アウトサンプルの場合においても、RMSE でみると [G-Stable & MEMM] モデルと Merton モデルには必ずしも明確な差があるとまではいえないという結果であった。ただし、ARPE の値を比較すれば、[G-Stable & MEMM] モデルに比べて Merton モデルの場合はオプションの全体的な特徴を捉えることができていることがわかる。(6.2) を解く場合には、先に指摘したように、残存期間の長い、また、イン・ザ・マネーのオプションに比重が偏ってしまう。そこで、(6.2) にかえて

$$\text{SSE}(\Theta_t) := \sum_{i=1}^{n(t)} |\sigma(K_i, T_i) - \text{Vol}(\eta(\Theta_t, K_i, T_i))|^2 \rightarrow \min \quad (6.3)$$

を解くことによってパラメータを推定した。ここに、 σ は建値ボラティリティを表すものとし、 $\text{Vol}(\cdot; K, T)$ は与えられたオプション価格に対応するインプライド・ボラティリティを表すものとする。(6.3) の場合には (6.2) の場合のように一部分に極端に比重が掛かるということはないといえるだろう。実際、期間全体での建値ボラティリティの最大値は 14.538 %、最小値は 6.9875 % である。このときの結果をまとめたものが表 24 である。

表 24 からわかるように、ボラティリティ・ベースでカリブレーションを行った場合には、価格ベースの場合に比べて RMSE の値は全体的に悪化している一方で、ARPE の値は改善している。すなわち、このときに推定されたパラメータ (表 25) は、オプションに対してそ

表 22 In-sample Performance (sample period : 2005/9/5 - 2006/9/4) and averages of parameter estimates

Model	Measure	Calibration Error		Averages of Model Parameter Estimates (Standard Deviation)
		ARPE	RMSE	
one parameter models				
Black-Scholes Model		0.0595	0.0780	$\sigma = 0.0880$ (0.0054)
two parameter models				
FMLS		0.0549	0.0435	$\alpha = 1.9517$ (0.0219), $\sigma = 0.0602$ (0.0036)
three parameter models				
scaled t-distribution	ESMM	0.0764	0.0558	$b_0 = -0.0318$ (0.0021), $\gamma = 0.0910$ (0.0065), $n = 13.151$ (2.6845)
four parameter models				
VG Process	ESMM	0.0534	0.0448	$b_0 = 0.4583$ (0.3743), $C = 165.82$ (78.774), $c_1 = 290.47$ (148.46), $c_2 = 230.08$ (104.31)
NIG Process	ESMM	0.0505	0.0544	$b_0 = -0.0257$ (0.0037), $\alpha = 440.42$ (309.51), $\beta = 3.9297$ (10.586), $\delta = 3.3761$ (2.7078)
Merton Model	MCMC	0.0642	0.0405	$\sigma^2 = 0.0058$ (0.0006), $\lambda = 1.6641$ (2.0800), $m = -0.0447$ (0.0198), $v = 0.0002$ (0.0005)
Stable Process	MEMM	0.0392	0.0398	$b = -0.0391$ (0.0008), $\alpha = 1.9722$ (0.0120), $c_1 = 0.0002$ (0.0001), $c_2 = 0.000003$ (0.00001)

表 23 アウトサンプル分析の結果

Model	Measure	Pricing Error	
		ARPE	RMSE
one parameter models			
Black-Scholes		0.0628	0.0798
two parameter models			
FMLS		0.0575	0.0467
three parameter models			
scaled t-distribution	ESMM	0.0779	0.0584
four parameter models			
Variance Gamma Process	ESMM	0.0562	0.0480
Normal Inverse Gaussian Process	ESMM	0.0540	0.0570
Merton Model	MCMM	0.0661	0.0440
Stable Process	MEMM	0.0435	0.0432

の全体的な特徴にフィットするように推定されたものであるといえる。そして、表 24 から Merton モデルがオプションの全体的な特徴を捉えることができていなかったことが明確にわかるであろう。実際、[G-Stable & MEMM] モデルの場合に比べ、Merton モデルの場合には RMSE の値は極端に悪化している。

また、残存期間が 1 週間の場合にはボラティリティ・スマイルの傾向が強く現れている一方、それ以外の残存期間の場合にはボラティリティ・スキューの傾向が強く現れていた。したがって、価格ベースで見た場合には残存期間 1 週間の場合のオプション価格は総じて低い。そのため、全体的にボラティリティ・スキューの傾向が強かったといえる。しかしながら、(6.3) の場合には残存期間 1 週間の場合の比重が高まり、ボラティリティ・スキューの傾向が弱まっている。それゆえ、(6.2) の場合には FMLS モデルは幾何 VG 過程モデルよりも当てはまりのよい予測性の高いモデルであったが、表 24 からわかるように、(6.3) の場合には幾何 VG 過程モデルのほうが当てはまりがよく予測性の高いモデルであるという結果になっている。これは、FMLS モデルがボラティリティ・スキューの傾向が強いオプションに対しては有効なモデルである一方、その傾向が弱まるとその有効性も極端に弱まってしまふことを示しているといえる。これに対して、[G-Stable & MEMM] モデルはボラティリティ・スマイルの傾向が強い場合でもボラティリティ・スキューの傾向が強い場合でもその有効性は損なわれていない。

FMLS モデルや Merton モデルにおける結果のように (6.2) の場合と (6.3) の場合とで結

果が大きく左右されてしまうモデルは，オプションの全体的な特徴を捉えることができないモデルであることを意味しているであろう．

結果として，[G-Stable & MEMM] モデルは対象とした通貨オプションの全体的な特徴をよく捉えており，かつ，予測モデルとしても予測性の高いモデルであると結論できる．

表 24 (6.3) の場合の結果

Model	Measure	In-sample		Out-of-sample	
		ARPE	RMSE	ARPE	RMSE
FMLS		0.0544	0.0648	0.0596	0.0678
VG Process	ESMM	0.0513	0.0599	0.0561	0.0632
Merton Model	MCMM	0.0527	0.0612	0.0580	0.0645
Stable Process	MEMM	0.0349	0.0485	0.0428	0.0525

表 25 (6.3) のときの推定値：このとき，Merton モデルの推定値は (6.2) の場合に比べ標準偏差が大きな値を取っておりパラメータが不安定になっているように見える．これは， $\lambda = 1.9, m = -0.013$ のような場合に加え， $\lambda = 92, m = -0.0005$ のような小さなジャンプが頻繁に起こる場合や $\lambda = 0.49, m = -0.058$ のように大きなジャンプが低頻度で起こるようなケースが混在しているためである．

Model	Measure	Averages of Model Parameter Estimates (Std. dev.)			
FMLS		$\alpha = 1.9593,$ (0.0164)	$\sigma = 0.0622$ (0.0048)		
VG Process	ESMM	$b_0 = 0.4583,$ (0.3743)	$C = 165.82,$ (78.774)	$c_1 = 290.47,$ (148.46)	$c_2 = 230.08$ (104.31)
Merton Model	MCMM	$\sigma^2 = 0.0056,$ (0.0019)	$\lambda = 11.386,$ (21.524)	$m = -0.0226,$ (0.0199)	$v = 0.0003$ (0.0004)
Stable Process	MEMM	$b = -0.0389,$ (0.0012)	$\alpha = 1.9698,$ (0.0192)	$c_1 = 0.0002,$ (0.0001)	$c_2 = 7.78E-06$ (3.03E-05)

6.5 まとめと結論

本章では，店頭取引されている通貨オプションのデータを用いて，幾何安定過程に基づいたオプション評価モデルである [G-Stable & MEMM] モデルのパフォーマンス評価を実証的観点から行った．ここで，[G-Stable&MEMM] モデルと比較するモデルとして，このモデルとパラメータ数の同じ代表的な幾何レヴィ過程モデルである，幾何 VG 過程と幾何

NIG 過程および Merton モデルに注目した。また、 $c_2 = 0$ の特殊な場合での幾何安定過程モデルである FMLS モデルにも注目をした。

FMLS モデルは、ボラティリティ・スキューが傾向として強い場合には当てはまりがよいがその傾向が弱まるとモデルの有効性も極端に弱まった。結果、FMLS モデルの有効性は限定的なものであった。FMLS モデルは $c_2 = 0$ という特殊なケースの場合であったのでこの結果は当然といえば当然といえるだろう。それに対して、[G-Stable&MEMM] モデルはボラティリティ・スキューが傾向として強い場合はもちろんのことボラティリティ・スマイルの傾向が強い場合においても当てはまりのよいモデルであった。

また、[G-Stable & MEMM] モデルは、対象としたモデルの中では RMSE の値が一番小さく予測性の高いモデルであった。特に、対象としたオプションの全体的な特徴をもっともよく捉えることができていたモデルであった。

そして、この結果は MEMM の重要性を示すものである。実際、幾何安定過程に適用できる同値マルチンゲール測度は現在のところ MEMM が唯一といえる。MEMM は適用できる幾何レヴィ過程の範囲が広いため、重要なモデル（今の場合には幾何安定過程）が分析の候補から除外されることはないといえる。

謝辞

りそな銀行の吉村哲郎氏と荒川研一氏には通貨オプションについてご教示頂くとともに有益なコメントを頂いた。また、名古屋市立大学大学院経済学研究科の三澤哲也教授には数値計算に関して有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝申し上げる。

7 結語

ブラック・ショールズモデルでは，原資産の価格過程は幾何ブラウン運動に従うことが仮定されており，その収益率分布は正規分布に従う．しかしながら，現実の株価収益率分布は正規分布よりも急尖的な特徴を持ち，あるいは，左右非対称な分布をしていた．これは，株価が時に急激な変動をすることに起因するものである．さらに，オプションとは将来の株価の変動リスクに対する保険的商品であることから，将来時点において予想される収益率分布が正規分布に従わない場合にはその影響は顕著にオプション価格に反映されるであろう．このように，原資産の収益率分布の非正規性はオプション価格評価にとって重要な要因である．この特徴を説明できるようにブラック・ショールズモデルを拡張したのが Miyahara (2001) で導入された [GLP & MEMM] モデルに代表される幾何レヴィ過程モデルであった．

本稿では，[GLP & MEMM] モデルのシミュレーション分析によるモデル評価と実証的な観点からのモデル評価を行い，その結果について述べた．

[GLP & MEMM] モデルは，その数学的な複雑さからモデルの特徴を解析的に評価することは難しい．そこで，シミュレーション分析によってモデルの特徴を分析した．その結果，[GLP & MEMM] モデルはボラティリティ・スマイル/スキューを説明し得るモデルであることがわかった．特に，[GLP & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティの特徴は幾何レヴィ過程に大きく依存していた．そして，[GLP & MEMM] モデルとしては [G-Stable & MEMM] モデルが重要なモデルである可能性が高いことが分かった．また，同値マルチンゲール測度間でボラティリティ・スマイル/スキューの再現性の比較を行ったが，ほとんど差はみられなかった．したがって，幾何レヴィ過程モデルのモデル選択の問題は，幾何レヴィ過程としてどのプロセスを選択するのかが重要である．そして，測度選択の問題は例えば選択した幾何レヴィ過程に対してオプション価格の数値計算が行いやすいものを選べばよいであろう．

シミュレーション分析の結果から，我々は [GLP & MEMM] モデルとして特に [G-Stable & MEMM] モデルに注目した．

[GLP & MEMM] モデルの重要性にもかかわらず [GLP & MEMM] モデルに対する実証分析はほとんど行われていない．そこで，本稿では実証的な観点からモデルの評価を行っ

た．実証分析としては，日経 225 株価指数オプションと OTC の通貨オプションに対して分析を行った．

日経 225 株価指数オプションに対する分析では，株価収益率分布の非正規性がオプション価格に反映されている可能性があることが分かった．つまり，ブラック・ショールズモデルから株価収益率分布の非正規性を説明できるモデルである幾何レヴィ過程モデルに拡張することへの実証的な根拠が得られた．

ただし，日経 225 株価指数オプションの場合には，収益率分布の非正規性の影響はオプション価格に対して大きなウェイトを占めているわけではない．実際，幾何レヴィ過程モデルは株価の収益率分布の非正規性の影響が強いと考えられる区間ではそうでない区間に対してブラック・ショールズモデルよりもオプション評価誤差に改善は見られたが，まだ誤差は多く残っていた．また，オプション価格の予測性という点では，幾何レヴィ過程モデルとブラック・ショールズモデルに大きなパフォーマンスの差はみられなかった．幾何レヴィ過程モデルに対する実証的な観点からのモデル評価を行うためには収益率分布の非正規性の影響がオプション価格に強く反映されている可能性のあるオプション市場において分析を行う必要がある．このことから OTC の通貨オプションに注目した．

OTC の通貨オプションに対する分析では，幾何レヴィ過程モデルはブラック・ショールズモデルと比較してあてまり度合い及び予測性の点で有意な差がみられた．特に [G-Stable & MEMM] モデルがオプション価格に対する全体的な当てはまり及び予測性の点で最も優れたパフォーマンスを示した．

これらの分析結果から我々は [GLP & MEMM] モデルとして特に [G-Stable & MEMM] モデルが非常に重要なモデルであることを結論として主張する．そして，この結論は MEMM の重要性を示すものでもある．それは，幾何安定過程に適用できる同値マルチンゲール測度は現在のところ MEMM が唯一といえるからである．

参考文献

- Ait-Sahalia, Y. and Lo, A. W., Nonparametric estimation of state-price, *The Journal of Finance*, Vol. LIII, No. 2, pp. 499–547, 1998.
- Bakshi, G., Cao, C., and Chen, Z., Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models, *The Journal of Finance*, Vol. 52, No. 5, 1997.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Normal inverse Gaussian distributions and the modeling of stock returns, Research Report No 300, Department of Theoretical Statistics, Aarhus University, 1995.
- Black, F. and Scholes, M., The pricing of options and corporate liabilities, *Journal Political Economy*, Vol. 81, pp. 637–659, 1973.
- Blattberg, R. C. and Gonedes, N. J., A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices, *The Journal of Business*, Vol. 47, pp. 244–280, 1974.
- Carr, P. and Madan, D. B., Option valuation using the fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance*, Vol. 2, pp. 61–73, 1998.
- Carr, P. and Wu, L., The Finite Moment Log Stable Process and Option Pricing, *The Journal of Finance*, Vol. 58, No. 2, pp. 753–777, 2003.
- Carr, P. and Wu, L., Stochastic Skew in Currency Options, 2004.
- Chan, T., Pricing contingent claims on stocks driven by Lévy processes, *The Annals of Applied Probability*, Vol. 9, No. 2, pp. 504–528, 1999.
- Cont, R. and Fonseca, J., Dynamics of implied volatility surfaces, *Quantitative finance*, Vol. 2, , 2002.
- Cont, R. and Tankov, P., Calibration of jump-diffusion option-pricing models: a robust non-parametric approach, preprint, 2002.
- Daal, E. and Madan, D., An Empirical Examination of the Variance-Gamma Model for Foreign Currency Options, preprint, 2003.
- Dumas, B., Fleming, J., and Whaley, R. E., Implied volatility functions: Empirical tests, *Journal of Finance*, Vol. 53, No. 6, pp. 2059–2106, 1998.

- Fama, E. F., Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, *The Journal of Business*, Vol. 36, pp. 420–429, 1963.
- Föllmer, H. and Schweizer, M., Hedging of contingent claims under incomplete information, In Davis, M. H. A. and Elliott, R. J., editors, *Applied Stochastic Analysis*, pp. 389–414, Gordon and Breach, 1990.
- Fujiwara, T. and Miyahara, Y., The minimal entropy martingale measures for geometric Lévy processes, *Finance and Stochastics*, Vol. 7, pp. 509–531, 2003.
- Garman, M. and Kohlhagen, S., Foreign Currency Option Values, *The Journal of International Money and Finance*, Vol. 2, pp. 231–237, 1983.
- Gerber, H. U. and Shiu, E. S., Option pricing by Esscher transforms, *Transactions of the Society of Actuaries*, Vol. XLVI, pp. 99–191, 1994.
- Grosswald, E., The Student t-Distribution of Any Degree of Freedom is Infinitely Divisible, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, Vol. 36, pp. 103–109, 1976.
- Hafner, R. and Wallmeieri, M., The Dynamics of DAX Implied Volatilities, preprint, 2000.
- ジョン・ハル、フィナンシャルエンジニアリング、金融財政事情研究会、5、2003。
- Hurst, S., The characteristic function of the Student t distribution, Financial Mathematics Research Report No. FMRR 006-95, 1995.
- Madan, D. B., Carr, P., and Chang, E. C., The Variance Gamma process and option pricing, *European Finance Review*, Vol. 2, pp. 79–105, 1998.
- Madan, D. and Seneta, E., The variance gamma (vg) model for share market returns, *J. of Business*, Vol. 63, No. 4, pp. 511–524, 1990.
- Mandelbrot, B., The variation of certain speculative prices, *J. of Business*, Vol. 36, pp. 394–419, 1963.
- Merton, R. C., Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, pp. 141–183, 1973.
- Merton, R. C., Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, pp. 125–144, 1976.
- Miyahara, Y., Canonical Martingale Measures of Incomplete Assets Markets, *Probability*

- Theory and Mathematical Statistics : Proceedings of the Seventh Japan-Russia Symposium, Tokyo 1995*, pp. 343–352, World Scientific, 1996.
- Miyahara, Y., Minimal Entropy Martingale Measures of Jump Type Price Processes in Incomplete Assets Markets, *Asian-Pacific Financial Markets*, Vol. 6, No. 2, pp. 97–113, 1999.
- Miyahara, Y., [Geometric Lévy processes & MEMM] pricing model and relating estimation problems, *Asian-Pacific Financial Markets*, Vol. 8, No. 1, pp. 45–60, 2001.
- 宮原孝夫、株価モデルとレヴィ過程、金融工学の基礎 1、朝倉書店、2003。
- Miyahara, Y., The [GLP & MEMM] Pricing Model and Related Problems, In Akahori, J., editor, *Proceedings of the 5th Ritsumeikan International Symposium Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance*, pp. 125–156, 2006.
- Miyahara, Y. and Novikov, A., Geometric lévy process pricing model, In *Proceedings of Steklov Mathematical Institute*, Vol. 237, pp. 176–191, 2002.
- Miyahara, Y. and Moriwaki, N., Application of [GLP & MEMM] model to Nikkei 225 option, The 7th JAFEE International Conference, 2005.
- Miyahara, Y. and Moriwaki, N., volatility smile/smirk properties of [GLP & MEMM] models, 京都大学数理解析研究所考究録 1462 「確率数値解析における諸問題、VII」, pp. 156–170, 2006.
- 森脇成彦、スマイル・スキュー現象を構造的に有する証券市場モデルとしての幾何レヴィ過程モデルについての考察、JAFEE 2004 年 夏季大会、2004。
- 森脇成彦、幾何レヴィ過程モデルによる日経 225 株価指数オプション市場の分析、オイコノミカ、Vol. 43, No. 1, pp. 45–74、2006。
- 森脇成彦・宮原孝夫、MEMM に基づいた幾何安定過程オプション価格モデルの実証分析、Discussion Papers in Economics No. 454, Nagoya City University、2006。
- Ncube, M., Modelling implied volatility with ols and panel data models, *Journal of Banking & Finance, Elsevier*, Vol. 20, pp. 71–84, 1996.
- Pena, I., Rubio, G., and Serna, G., Why do we smile ? on the determinants of the implied volatility function, *Journal of Banking & Finance*, Vol. 23, pp. 1151–

- 1179, 1999.
- Praetz, P. D., The Distribution of Share Price Changes, *The Journal of Business*, Vol. 45, pp. 49–55, 1972.
- Prause, K., *The Generalized Hyperbolic molde: estimation, financial derivatives, and risk measures*, PhD thesis, Freiburg, 1999.
- Rubinstein, M., Implied binomial trees, *The Journal of Finance*, Vol. LXIX, No. 3, pp. 771–818, 1994.
- Samuelson, P., Rational theory of warrant pricing, *Industrial Management Review*, Vol. 6, pp. 13–32, 1965.
- Sato, K., *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, 1999.
- Schoutens, W., *Lévy process in finance*, WILEY, 2003.
- Takano, K., The Lévy representation of the characteristic function of the probability density $\Gamma(m + \frac{d}{2}) \{\pi^{d/2} \Gamma(m)\}^{-1} (1 + |x|^2)^{-m-d/2}$, 1989.
- Wu, L. and Dai, M., Risk aversion in option pricing with jump-diffusion process, preprint, 2001.

図目次

1	S^* のサンプル・パス	64
2	価格差	64
3	ボラティリティ・スマイル：2004/12/15, 残存期間 57 日	72
4	ボラティリティ・スキュー：2001/1/4, 残存期間 289 日	72
5	[G-Stable & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ	76
6	[G-Stable & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ	76
7	[G-Stable & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ	76
8	[G-Stable & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ	76
9	[G-Stable & MEMM] モデルとブラック・ショールズモデル	77
10	[G-VG & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ	78
11	[G-VG & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ	78

12	[G-VG & MEMM] モデルのインプライド・ボラティリティ	78
13	ボラティリティ・スキューの再現性	80
14	ボラティリティ・スキューの再現性	80
15	ボラティリティ・スキューの再現性	80
16	ボラティリティ・スキューの再現性	80
17	ボラティリティ・スキューの再現性	81
18	ボラティリティ・スキューの再現性	81
19	ボラティリティ・スキューの再現性	83
20	ボラティリティ・スキューの再現性	83
21	ボラティリティ・スキューの再現性	83
22	ボラティリティ・スキューの再現性	84
23	ボラティリティ・スキューの再現性	84
24	Volatility smile/smirk properties of the [G-Stable & MEMM	102
25	[G-Stable & MEMM] モデルとブラック・ショールズモデル	102
26	通貨オプションの建値ボラティリティ	103
27	2005 年 9 月 5 日において建値された通貨オプションのボラティリティ・ カーブ	105

表目次

1	正規性の検定結果	58
2	分布のあてはまり：期間 A	62
3	分布のあてはまり：期間 B	63
4	残存期間の計算方法の違いについて	65
5	Out-of-Sample Pricing Errors : Term A	68
6	Out-of-Sample Pricing Errors : Term B	69
7	日経 225 株価指数オプションのボラティリティ・スマイル/スキュー現象 .	74
8	日経 225 株価指数オプションのボラティリティ・スマイル/スキュー現象 .	74
9	分析対象とした日経 225 ヨーロッパ型コールオプションの各マニネスのお ける平均価格	82

10	Calibration Results	85
11	Calibration Results	86
12	日経 225 のコールオプション価格の平均値 (標準偏差): 1999 年 1 月 4 日 から 2000 年 12 月 29 日	91
13	日経 225 のコールオプション価格の平均値 (標準偏差): 2003 年 1 月 6 日 から 2004 年 12 月 30 日	91
14	インサンプル分析の結果	93
15	パラメータの推定値	93
16	パラメータの推定値	93
17	2 標本平均の差の検定	95
18	2 標本平均の差の検定	95
19	アウトサンプル分析の結果	96
20	通貨オプションの建値の例	105
21	2005 年 9 月 5 日から 2006 年 9 月 4 日の期間におけるドル円のコールオプ ション価格の平均値 (標準偏差)	106
22	インサンプル分析の結果	109
23	アウトサンプル分析の結果	110
24	(6.3) の場合の結果	111
25	(6.3) のときの推定値	111